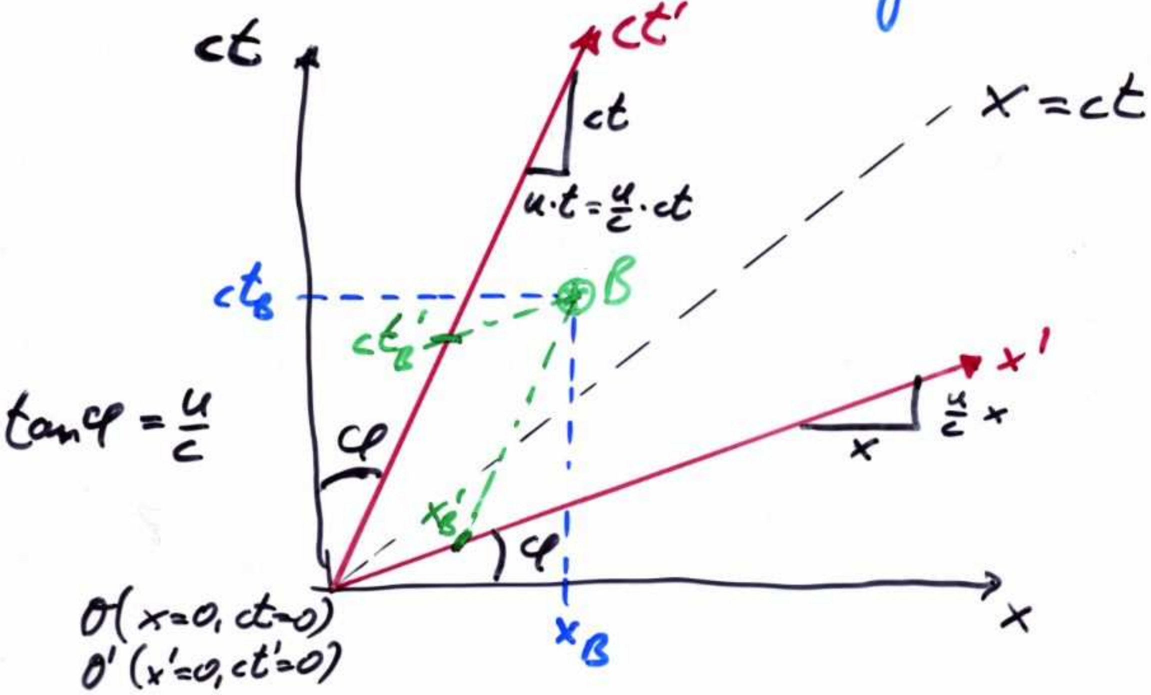
7.4 Minkowski-Diagramm



- Lorentztransformation $(x_B, t_B) \leftrightarrow (x'_B, t'_B)$
- Maßstab für "relativist. Distanzen"
  - ▶ unverändert (invariant) bei Lorentztransf.

$$\boxed{s^2 = (ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - (x')^2}$$

→ ergibt in allen Inertialsystemen den gleichen Wert

NB: Maßstab ≠ einfache Zeit-/Längendifferenz
→ entspricht nicht gewohnten Abständen
→ Paradoxien

7.5 Paradoxien der Relativitätstheorie

- **Längenkontraktion in $S \leftrightarrow S'$**

(Garagenparadoxon)

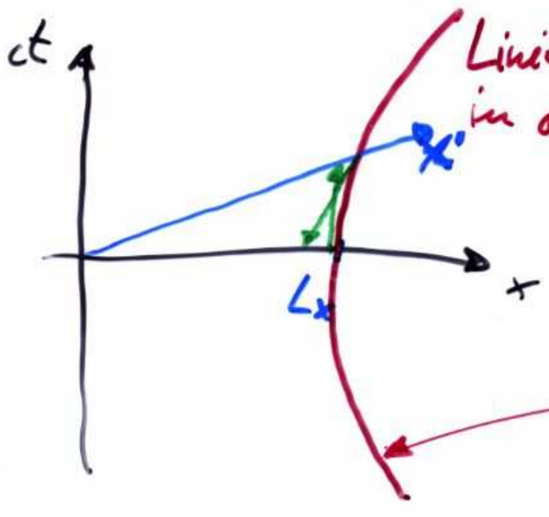
in S: bewegter Maßstab L_x von S' erscheint in S verkürzt: $L = \frac{L_x}{\gamma}$

$$\underbrace{L_x = x_2' - x_1'}_{\text{in } S'} = \gamma[x_2 - ut] - \gamma[x_1 - ut]$$
$$= \gamma[x_2 - x_1] = \gamma \underbrace{L}_{\text{in } S}$$

in S': ruhender Maßstab L_x von S erscheint in S' verkürzt: $L' = \frac{L_x}{\gamma}$

$$\underbrace{L_x = x_2 - x_1}_{\text{in } S} = \gamma[x_2' + ut'] - \gamma[x_1' + ut']$$
$$= \gamma[x_2' - x_1'] = \gamma \underbrace{L'}_{\text{in } S'}$$

Grund:
- Inertialsysteme S, S' sind gleichberechtigt
- Lorentztransf. für Längendifferenzen ist unabhängig vom Vorzeichen von u (u^2 in γ)



Linie gleicher L_x in allen Inertialsystemen

$(ct)^2 - x^2 = -L_x^2$

$ct = \pm\sqrt{x^2 - L_x^2}$

- <u>Zeitdilatation in $S \leftrightarrow S'$</u>

(Uhrenparadoxon)

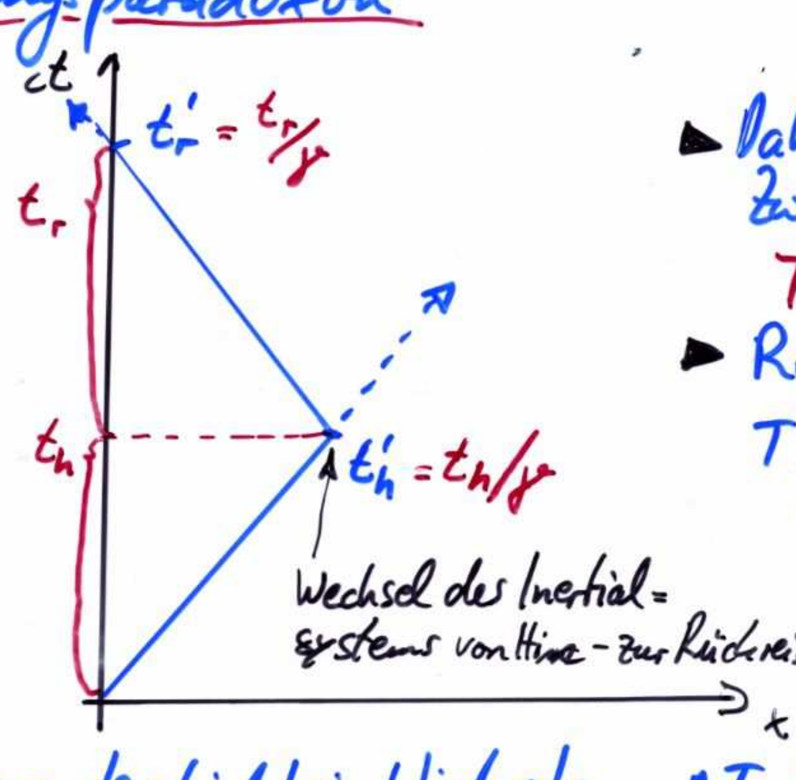
in S: Zeitdauer Δt_* von S'
erscheint in S verlängert: $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_*$

$$\underbrace{\Delta t = t_2 - t_1}_{\text{in } S} = \gamma\left(t_2' + \frac{ux'}{c^2}\right) - \gamma\left(t_1' + \frac{ux'}{c^2}\right)$$
$$= \gamma \underbrace{(t_2' - t_1')}_{\text{in } S'} = \gamma \Delta t_*$$

in S': Zeitdauer Δt_* von S
erscheint in S' verlängert: $\Delta t' = \gamma \Delta t_*$

$$\underbrace{\Delta t' = t_2' - t_1'}_{\text{in } S'} = \gamma\left(t_2 - \frac{ux}{c^2}\right) - \gamma\left(t_1 - \frac{ux}{c^2}\right)$$
$$= \gamma \underbrace{(t_2 - t_1)}_{\text{in } S} = \gamma \Delta t_*$$

- <u>Zwillingsparadoxon</u>



▶ Daheim-gebliebener Zwilling:

$T = t_h + t_r$

▶ Reisender Zwilling

$T' = t_h' + t_r'$
$= \frac{t_h}{\gamma} + \frac{t_r}{\gamma} = \frac{T}{\gamma}$

→ Altersunterschied beim Wiedersehen: $\Delta T = T - T' = T\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) > 0$

7.6 relativistische Dynamik

- Impulserhaltung (1. Newtonsche Axiom)
  - klassisch: $\frac{dp}{dt} = 0$ ohne äußere Kräfte in allen Inertialsystemen
  - relativistisch: $\frac{dp}{dt} \overset{!}{=} 0$ — " —

Lorentztransf. des Impulses
↳ relativist. Geschwindigkeitsaddition $v' = \frac{v-u}{1-\frac{vu}{c^2}}$

betrachte: $\gamma' v' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} \cdot v' = \frac{v-u}{1-\frac{vu}{c^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} \overset{(*)}{=} \ldots$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot v - \frac{u}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot c \right]$$

$$\longrightarrow \boxed{\gamma' v' =: \gamma_u \cdot \left[\gamma \cdot v - \beta_u \cdot \gamma c \right]}$$

$$(*) \quad \left(\frac{v-u}{1-\frac{uv}{c^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} \right)^2 = \frac{(v-u)^2}{\left(1-\frac{vu}{c^2}\right)^2 \left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)} \overset{v' = \ldots}{=} \frac{(v-u)^2}{\left(1-\frac{vu}{c^2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{(v-u)^2}{\left(1-\frac{vu}{c^2}\right)^2}\right)} = \frac{(v-u)^2}{\left(1-\frac{vu}{c^2}\right)^2 - \frac{1}{c^2}(v-u)^2}$$

$$= \frac{(v-u)^2}{1 - 2\frac{vu}{c^2} + \frac{v^2u^2}{c^4} - \frac{v^2}{c^2} + \frac{2vu}{c^2} - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{(v-u)^2}{1 - \frac{u^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\left(\frac{u^2}{c^2} - 1\right)} = \frac{(v-u)^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} =: \gamma_u^2 \gamma^2 (v-u)^2$$