8 Schwingungen und Wellen

... haben herausragende **Bedeutung** in **Physik und Technik**!

- Physik: z.B.
  - Wellenausbreitung in Materie
    $\leftrightarrow$ Mikrostruktur der Materie
  - Quantenmechanik:
    Teilchen als Welle
    Wellen als Teilchen

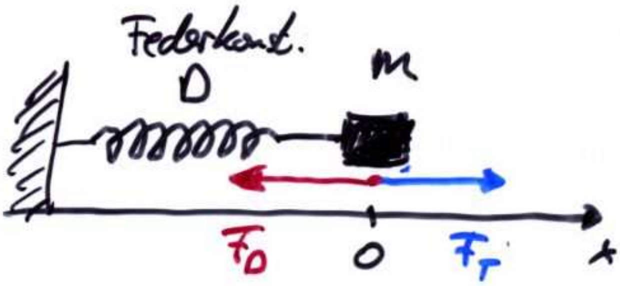
    ...

- Technik: z.B.
  - Resonanz bei Schwingungen
    $\leftrightarrow$ Festigkeit von Maschinen, Gebäuden, ...
  - Wellen $\leftrightarrow$ Schall, Radio, Telefon, Licht, ...

    ...

8.1 Harmonische Schwingungen

- **Beispiel: Federpendel**



$T_{10} = 6.2\,s$ für 10 Schwingungen bei $m = 30\,g$
$T_{10} = 8.6\,s$ für 10 —"— bei $m = 60\,g$
$T_{10} = 7.3\,s$ für 10 —"— bei $m = 40\,g$

$\rightarrow T \sim \sqrt{m}$

- Trägheitskraft $F_T = m\ddot{x}$
- Rückstellkraft $F_D = -Dx$

→ 3. Newtonsches Axiom (besser: d'Alembertsches Prinzip): $F_T = F_D$

$$\rightarrow \quad m\ddot{x} = -Dx$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \frac{D}{m}x = 0}$$

Schwingungs-Differential-gleichung (DGL)

Lösung: harmonische Schwingungen $\leftrightarrow$ Rückstellkraft linear (in x)

- Ansatz: $x_A(t) = A \cos \omega_0 t$

Amplitude

Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi f_0$ (Frequenz)

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$\dot{x}_A(t) = -A\omega_0 \sin \omega_0 t$

$\ddot{x}_A(t) = -A\omega_0^2 \cos \omega_0 t$

$$\rightarrow \ddot{x}_A + \frac{D}{m}x_A = -A\omega_0^2 \cos\omega_0 t + \frac{D}{m}\cdot A\cos\omega_0 t \overset{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \omega_0^2 = \frac{D}{m} \rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}} = \frac{2\pi}{T}$$

Auch $x_B(t) = B \cdot \sin\omega_0 t$ wäre Lösung

II allg. Lösung: Überlagerung von $x_A(t)$ und $x_B(t)$

$$\boxed{x(t) = x_A(t) + x_B(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t}$$

- Rand- / Startbedingungen
  - Ort: $x(t=0) = A \overset{!}{=} x_0$
  - Geschw.: $\dot{x}(t=0) = -A\omega_0 \sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega_0 t = B\omega_0 \overset{!}{=} v_0$

$\longrightarrow \quad A = x_0 \quad , \quad B = \frac{v_0}{\omega_0}$

- math. äquivalente Lösung:

$$\boxed{x(t) = \underset{\text{Amplitude}}{C} \cdot \cos(\omega_0 t - \underset{\text{Phase}}{\varphi})}$$

$$x(t) = C\cdot\cos(\omega_0 t - \varphi) = \underbrace{C\cdot\cos\varphi}\cdot\cos\omega_0 t + \underbrace{C\sin\varphi}\cdot\sin\omega_0 t$$

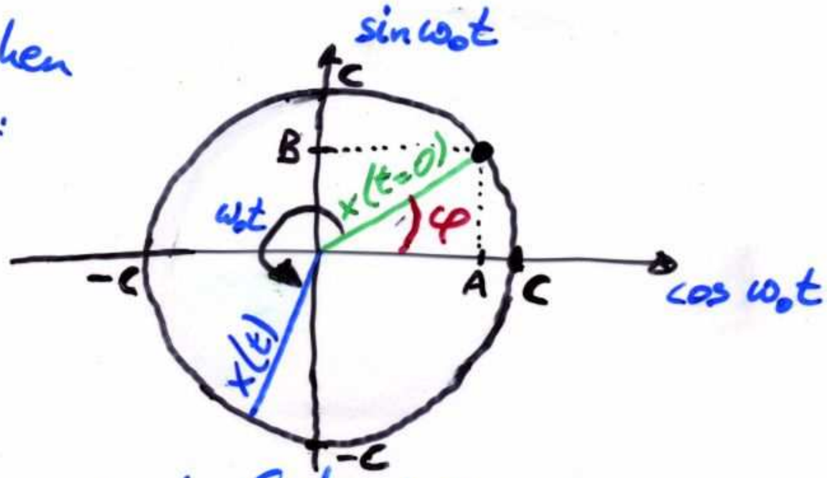
$$= A \cdot\cos\omega_0 t + B\cdot\sin\omega_0 t$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{B}{A} = \frac{C\cdot\sin\varphi}{C\cdot\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi}$$

$$\longrightarrow \quad A^2 + B^2 = C^2\cos^2\varphi + C^2\sin^2\varphi = C^2\underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{=1}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\sqrt{A^2 + B^2} = C}$$

- Relation zwischen den Lösungen:



harmonische Schwingung

$\Leftrightarrow$ gleichförmige Kreisbewegung

- Elegante(ste) Lösung der Schwingungs-DGL:

$$\boxed{\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0}$$

Lösungsansatz: $z(t) = z_0 \cdot e^{\lambda t}$

$$\dot{z}(t) = z_0 \lambda \cdot e^{\lambda t}$$

$$\ddot{z}(t) = z_0 \lambda^2 e^{\lambda t}$$

in $\ddot{z} + \omega_0^2 z = z_0 \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 \cdot z_0 e^{\lambda t} \overset{!}{=} 0$

$\longrightarrow \boxed{\lambda^2 + \omega_0^2 = 0}$ charakterist. Polynom der DGL

$\longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\omega_0^2} = \pm \omega_0 \sqrt{-1} = \pm \omega_0 \cdot i$ $\quad i := \sqrt{-1}$

$\rightarrow z(t) = z_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + z_2 e^{\lambda_2 t} = z_1 e^{i\omega_0 t} + z_2 e^{-i\omega_0 t}$

Euler-Formel: $\boxed{e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x}$

mit Euler-Formel folgt:

$$
\begin{aligned}
z(t) &= z_1 \cdot (\cos\omega_0 t + i \cdot \sin\omega_0 t) \\
&\quad + z_2 \cdot (\cos\omega_0 t - i \cdot \sin\omega_0 t) \\
&= \underbrace{(z_1 + z_2)}\cos\omega_0 t + \underbrace{i \cdot (z_1 - z_2)}\sin\omega_0 t \\
&= A \cdot \cos\omega_0 t + B \cdot \sin\omega_0 t
\end{aligned}
$$

d.h. $\left.\begin{aligned} A &= z_1 + z_2 \\ B &= i(z_1 - z_2) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} z_1 &= \tfrac{1}{2}(A - i \cdot B) \\ z_2 &= \tfrac{1}{2}(A + i \cdot B) \end{aligned}\right.$