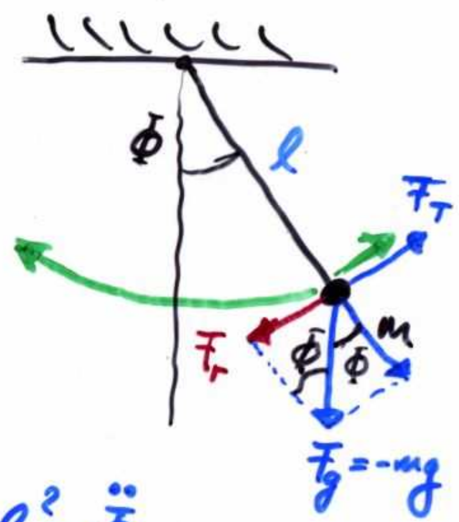
Beispiel: Fadenpendel
(hier Betrachtung mit Drehmomenten)



Rückstelldrehmoment:

$$M_r = l \cdot F_r$$
$$= -l \cdot mg \sin \Phi$$

Trägheitsdrehmoment:

$$M_T = l \cdot F_T = l \cdot m\ddot{x} = l^2 m \ddot{\Phi}$$

$$x = l \cdot \Phi \longrightarrow \ddot{x} = l \ddot{\Phi}$$

$$M_T = M_r$$

$$l^2 m \cdot \ddot{\Phi} = -mgl \sin \Phi$$

$$\boxed{\ddot{\Phi} = -\frac{g}{l} \cdot \sin \Phi}$$

Allg.: nicht-linear in Rückstellkraft
→ keine harmonische Schwingungen

Kleinwinkel-Näherung: $\sin \Phi = \sum_{j=0}^{\infty} \left. \frac{d^j \sin \Phi}{d\Phi^j} \right|_{\Phi=0} \cdot \frac{\Phi^j}{j!}$
(Taylor-Reihenentwicklung)

$$\rightarrow \underbrace{\sin \Phi = \Phi}_{} - \frac{\Phi^3}{3!} + \frac{\Phi^5}{5!} - + \ldots$$

→ Fadenpendel mit $\sin \Phi \approx \Phi$: $\boxed{\ddot{\Phi} + \frac{g}{l} \Phi = 0}$

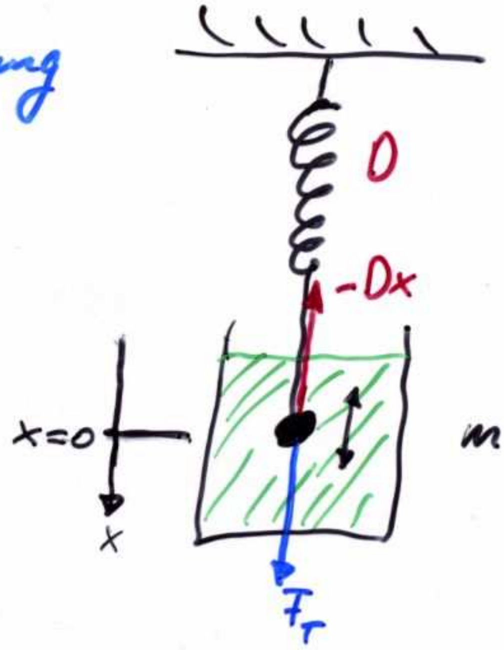
$$\uparrow$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

NB: ▸ ω_0 unabhängig von m!
▸ ω_0 skaliert mit $1/\sqrt{l}$

8.2 Gedämpfte Schwingungen

Reibung → Dämpfung der Schwingung



Reibungskraft, z.B.:

$$F_R = -b \cdot v = -b\dot{x}$$

Rückstellkraft

$$F_D = -Dx$$

Trägheitskraft

$$F_T = m\ddot{x}$$

$$\longrightarrow \quad F_T = F_D + F_R$$

$$m\ddot{x} = -Dx - b\dot{x}$$

$$\longrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \qquad 2\gamma := \frac{b}{m} \quad \omega_0^2 = \frac{D}{m}$$

Lösungsansatz: $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$

$$\dot{x} = \lambda x_0 e^{\lambda t} = \lambda x$$
$$\ddot{x} = \lambda^2 x_0 e^{\lambda t} = \lambda^2 x$$

$$\longrightarrow \quad \lambda^2 + 2\gamma \cdot \lambda + \omega_0^2 = 0$$

charakterist. Polynom

$$\longrightarrow \quad \boxed{\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$$

$$\longrightarrow \quad x(t) = e^{-\gamma t} \cdot \left[x_A \cdot e^{+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\cdot t} + x_B \cdot e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\cdot t} \right]$$

Fallunterscheidung:

- schwache Dämpfung $\rightarrow$ Schwingfall

$\gamma \ll \omega_0 \rightarrow \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2} = \underbrace{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}_{=:\omega \leq \omega_0} \cdot i =: \omega \cdot i$

$\rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} \cdot \left[x_A e^{i\omega t} + x_B \cdot e^{-i\omega t} \right]$

$= \ldots = e^{-\gamma t} \cdot \left[A \cdot \cos\omega t + B \cdot \sin\omega t \right]$

$\boxed{x(t) = e^{-\gamma t} \cdot C \cdot \cos(\omega t + \varphi)}$ $C = \sqrt{A^2+B^2}$, $\tan\varphi = -\frac{B}{A}$

Charakterisierung der Dämpfung:

- Logarithmisches Dekrement

$$\delta := \gamma \cdot T = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)$$

- Güte (v.a. erzwungene Schwingungen $\rightarrow$ folgt noch)

$$Q := \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

- starke Dämpfung $\longrightarrow$ Kriechfall

$\gamma \gg \omega_0$; Mit $\alpha := \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \geq 0$

$$\rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} \cdot \left[x_A \cdot e^{\alpha t} + x_B \cdot e^{-\alpha t} \right]$$

$$= e^{-\gamma t} \cdot \left[\underbrace{(x_A + x_B)} \cdot \underbrace{\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2}} + \underbrace{(x_A - x_B)} \cdot \underbrace{\frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2}} \right]$$

$$\rightarrow \boxed{x(t) = e^{-\gamma t} \cdot \left[A \cdot \cosh \alpha t + B \cdot \sinh \alpha t \right]}$$

Charakteristikum:

- kriecht langsam Gleichgewichtslage entgegen

- $\gamma = \omega_0$ $\longrightarrow$ aperiodischer Grenzfall

Spezialfall entarteter Lösungen des charakterist. Polynoms: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$

$\rightarrow$ DGL kann durch
- $x(t) = x_0 e^{-\gamma t}$ und auch durch
- $\frac{dx}{d\gamma} = c \cdot x_0 \cdot t e^{-\gamma t}$

gelöst werden.

$\hookrightarrow$ allg. Lösung: $\boxed{x(t) = x_0 (1 + ct) \cdot e^{-\gamma t}}$

Charakteristika:
- schwingt gerade eben nicht
- schnellste Annäherung an Gleichgewichtslage