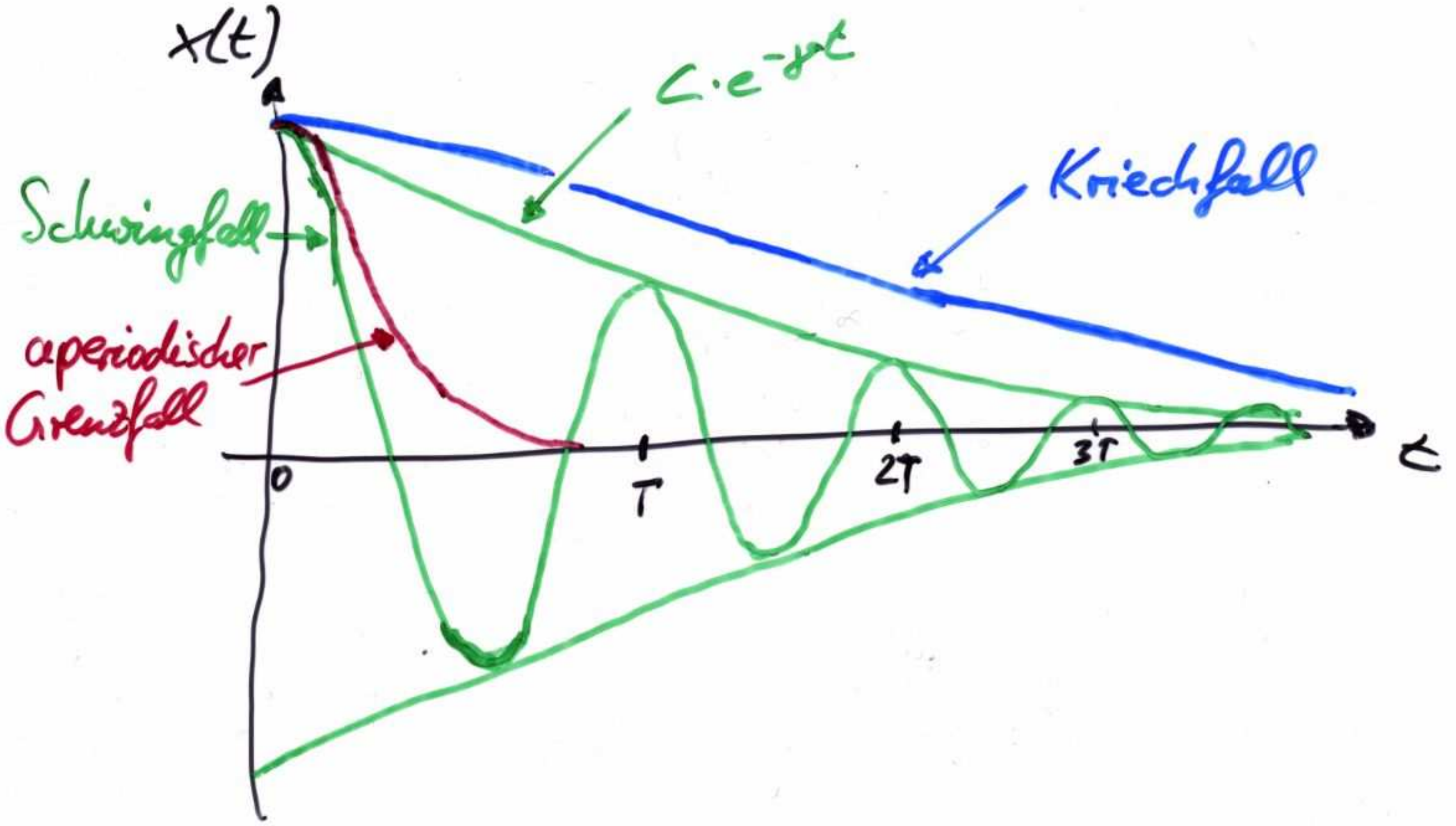


- (kurze) Energiebetrachtung bei Schwingungen
  - ungedämpfte Schwingungen: $x(t) = C \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$
    $\hookrightarrow \dot{x}(t) = -C\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$
  - $E_{kin}(t) = \frac{1}{2} m v(t)^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2$
    $= \frac{1}{2} m \omega_0^2 C^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$
  - $E_{pot}(t) = \int_{x(t)}^{0} \underbrace{F_D}_{=-Dx} \, dx' = -D \int_{x(t)}^{0} x' dx' = \frac{1}{2} \underbrace{D}_{\omega_0^2 = \frac{D}{m}} x(t)^2$
    $= \frac{1}{2} m \omega_0^2 C^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

$\rightarrow E(t) = E_{kin}(t) + E_{pot}(t)$
$= \frac{1}{2} m \omega_0^2 C^2 \cdot \big(\underbrace{\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)}_{=1}\big)$

$\rightarrow \boxed{E(t) = E_{ges} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 C^2 = \text{const}}$

- mittlere kinetische Energie

$$\overline{E_{kin}} = \frac{1}{T}\int_0^T E_{kin}(t)\,dt = \underbrace{\frac{1}{2} m \omega_0^2 C^2}_{= E_{ges}} \cdot \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega_0 t + \varphi)\,\widehat{dt}}_{= \frac{1}{2} \text{ für } T = \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

$$\boxed{\overline{E_{kin}} = \frac{1}{2} E_{ges}}$$

- mittlere potentielle Energie

$$\overline{E_{pot}} = \frac{1}{T}\int_0^T E_{pot}(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left(E_{ges} - E_{kin}(t)\right)dt$$

$$= \frac{1}{T} \cdot E_{ges} \cdot T - \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T E_{kin}(t)\,dt}_{= \frac{1}{2} E_{ges}} = \frac{1}{2} E_{ges}$$

$$\boxed{\overline{E_{pot}} = \frac{1}{2} E_{ges}}$$

- gedämpfte Schwingungen

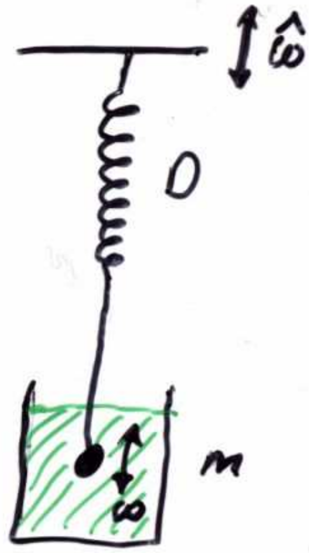
$$m\ddot{x} + Dx = -b\dot{x} \qquad | \cdot \dot{x}$$

$$m\ddot{x}\dot{x} + D\dot{x}x = \frac{d}{dt}\left[\underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2}_{E_{kin}(t)} + \underbrace{\frac{1}{2} D x^2}_{E_{pot}(t)}\right] = -b\dot{x}^2 \leq 0$$

$\rightarrow$ $\frac{d}{dt}\left[E_{kin}(t) + E_{pot}(t)\right] = -b\dot{x}^2 \leq 0$

$\rightarrow$ $E_{kin}(t) + E_{pot}(t)$ nimmt ab!

8.3 Erzwungene Schwingungen



Trägheitskraft $F_T = m\ddot{x}$

Rückstellkraft $F_D = -Dx$

Reibungskraft $F_R = -b\dot{x}$

Anregungskraft $F_A = F_0 \cos\hat{\omega}t$

$\longrightarrow \quad F_T = F_D + F_R + F_A$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\hat{\omega}t}$$

mit $2\gamma := \frac{b}{m}$, $\omega_0^2 := \frac{D}{m}$

(Typ: inhomogene DGL)

- Lösung einer inhomogenen (linear) DGL:
  = (1) allg. Lösung der homogenen DGL
  + (2) partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

Lösung mit komplexwertigen Ansatz:

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m}e^{i\hat{\omega}t}$$

zu (1) homogene DGL: $\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$

Lösung: entspricht gedämpften Schwingung (s. 8.2) ✓

zu (2) partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

z.B. für stationären Zustand

$\rightarrow$ Ansatz: $z(t) = A \cdot e^{i(\hat{\omega} t + \varphi)} = A \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\hat{\omega} t}$

$\hookrightarrow \dot{z}(t) = i\hat{\omega} \cdot A e^{i(\hat{\omega} t + \varphi)} = i\hat{\omega} \cdot z(t)$

$\ddot{z}(t) = \quad \ldots\ldots \quad = -\hat{\omega}^2 \cdot z(t)$

eingesetzt in inhomogene DGL

$$-\hat{\omega}^2 \cdot z(t) + 2\gamma \cdot i\hat{\omega}\, z(t) + \omega_0^2 z(t) = \frac{F_0}{m} e^{i\hat{\omega} t}$$

$$\rightarrow \left(-\hat{\omega}^2 + 2i\gamma\hat{\omega} + \omega_0^2\right) \cdot A e^{i\varphi} \cdot e^{i\hat{\omega} t} = \frac{F_0}{m} e^{i\hat{\omega} t}$$

$$\rightarrow \left(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2 + 2i\gamma\hat{\omega}\right) \cdot A e^{i\varphi} = \frac{F_0}{m}$$

Euler-Gleichung

$$\rightarrow A\cos\varphi + iA\sin\varphi = A e^{i\varphi} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \hat{\omega}^2 + 2i\gamma\hat{\omega}}$$

$$\rightarrow \boxed{A = \left|A e^{i\varphi}\right| = \sqrt{\left(A e^{i\varphi}\right) \cdot \left(A e^{i\varphi}\right)^*} = \circledast \ldots = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2)^2 + 4\gamma^2\hat{\omega}^2}}}$$

$$= \sqrt{\left[\mathrm{Re}\left(A e^{i\varphi}\right)\right]^2 + \left[\mathrm{Im}\left(A e^{i\varphi}\right)\right]^2}$$

d.h.: $A = A(\hat{\omega})$

$$\rightarrow \boxed{\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{A\sin\varphi}{A \cdot \cos\varphi} = \frac{\mathrm{Im}\left(A e^{i\varphi}\right)}{\mathrm{Re}\left(A e^{i\varphi}\right)} = \circledast\circledast \ldots = -\frac{2\gamma\hat{\omega}}{\omega_0^2 - \hat{\omega}^2}}$$

$$\circledast \left(A e^{i\varphi}\right) \cdot \left(A e^{-i\varphi}\right) = \left(\frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2) + (2i\gamma\hat{\omega})}\right) \cdot \left(\frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2) - (2i\gamma\hat{\omega})}\right) = \frac{(F_0/m)^2}{(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2)^2 - (2i\gamma\hat{\omega})(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2) + (2i\gamma\hat{\omega})(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2) + 4\gamma^2\hat{\omega}^2}$$

$$= \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2)^2 + 4\gamma^2\hat{\omega}^2}$$

$$\circledast\circledast\ A e^{i\varphi} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \hat{\omega}^2 + 2i\gamma\hat{\omega}} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \hat{\omega}^2 + 2i\gamma\hat{\omega}} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2) - (2i\gamma\hat{\omega})}{(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2) - (2i\gamma\hat{\omega})} = \frac{(F_0/m) \cdot (\omega_0^2 - \hat{\omega}^2)}{(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2)^2 + 4\gamma^2\hat{\omega}^2} - i \cdot \frac{(F_0/m) \cdot (2\gamma\hat{\omega})}{(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2)^2 + 4\gamma^2\hat{\omega}^2}$$