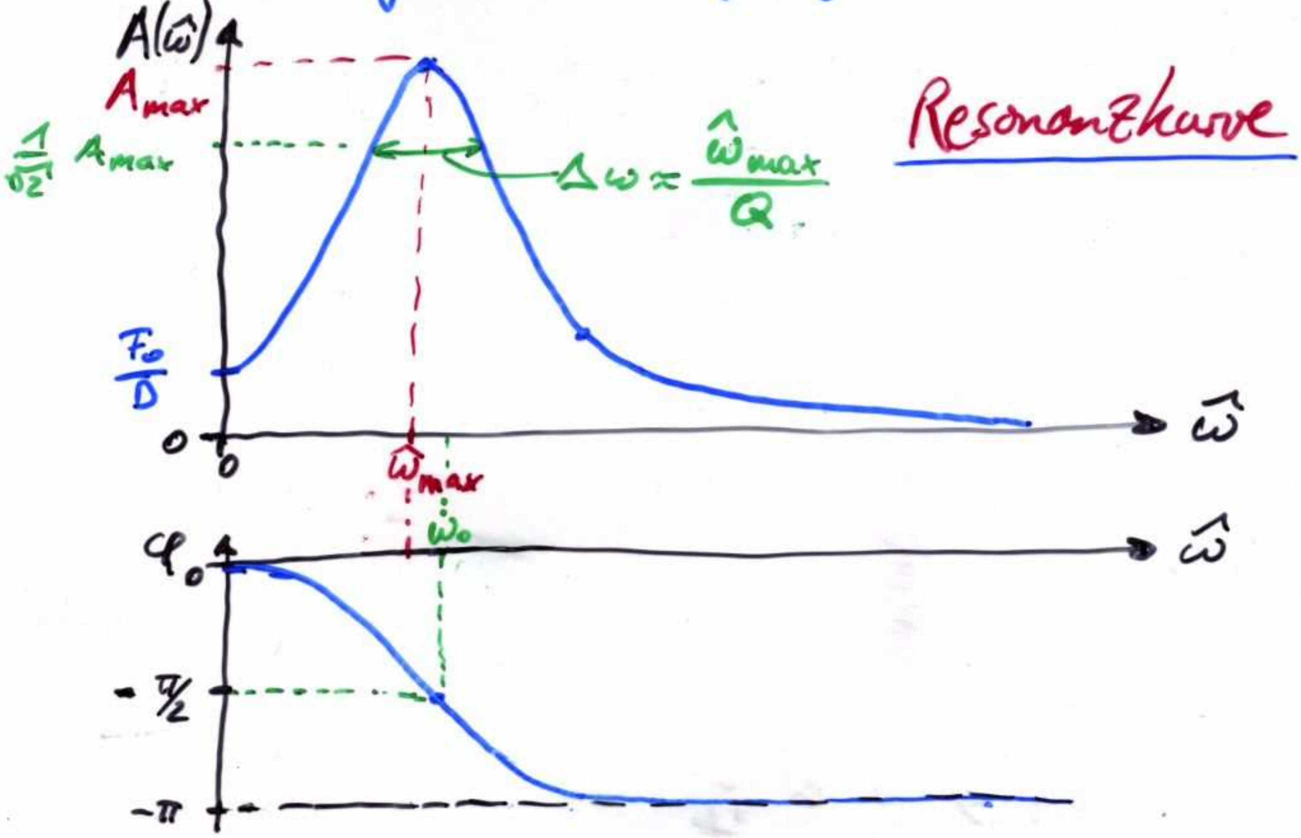
Charakteristika der stationären Lösung erzwungener Schwingungen



Resonanzfrequenz folgt aus Maximierung von

$$A(\hat{\omega}) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\hat{\omega}^2)^2 + 4\gamma^2\hat{\omega}^2}}$$

$$\longrightarrow \boxed{\hat{\omega}_{res} = \hat{\omega}_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}} \leq \underbrace{\omega = \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}_{\text{gedämpfte freie Schwingg.}} \leq \underbrace{\omega_0}_{\text{ungedämpfte Schwingg.}}$$

Resonanzkreisfrequenz

- Einschwingvorgang $\hat{=}$ Überlagerung von
  - gedämpften Schwingung (ω)
  - Schwingung des stationären Zustands ($\hat{\omega}$)

(NB: Einschwingvorgang erfordert Überlagerung von allg. Lösung der homogenen DGL + partikuläre Lösung der inhomogenen DGL)

8.4 Überlagerung von Schwingungen

Es gilt: $\boxed{\text{Superpositionsprinzip}}$, d.h. Schwingungen überlagern (addieren) sich ungestört

- **2 dimensionale Überlagerung**

$\longrightarrow$ Lissajous-Figuren

allg.: ▸ $x(t) = x_0 \cos(\omega_x t + \varphi_x)$

▸ $y(t) = y_0 \cos(\omega_y t + \varphi_y)$

z.B.: $\omega_x = \omega_y$, $x_0 = y_0$, $\varphi_x = 0°$, $\varphi_y = 90°$

- **1 dimensionale Überlagerung**

$x_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \rightarrow z_1(t) = C_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)}$

$x_2(t) = C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \rightarrow z_2(t) = C_2 e^{i(\omega_2 t + \varphi_2)}$

$\rightarrow x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$= \ldots$ (Additions= ... theoreme von sin, cos)

$= \ldots$

$\rightarrow x(t) = \mathrm{Re}(z(t))$

$= \mathrm{Re}(z_1(t) + z_2(t))$

$= \ldots$ (Multiplikation von Exponential=funktionen)

Beispiele für Überlagerung von Schwingungen:

- $\omega_1 = \omega_2 =: \omega$

$$\boxed{z(t)} = C_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + C_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}$$

$$= C_1 e^{i\omega t} \cdot e^{i\varphi_1} + C_2 e^{i\omega t} \cdot e^{i\varphi_2}$$

$$= \underbrace{\left(C_1 e^{i\varphi_1} + C_2 e^{i\varphi_2}\right)}_{} \cdot e^{i\omega t}$$

$$\boxed{= \quad C \cdot e^{i\varphi} \quad \cdot e^{i\omega t}}$$

$$C = \sqrt{(Ce^{i\varphi}) \cdot (C \cdot e^{-i\varphi})} = \sqrt{(C_1 e^{i\varphi_1} + C_2 e^{i\varphi_2}) \cdot (C_1 e^{-i\varphi_1} + C_2 e^{-i\varphi_2})}$$

$$= \ldots = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_1 C_2 \cdot (e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)})}$$

Euler-Formel:

$$\left.\begin{array}{l} e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \\ \Rightarrow e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi \\ e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}}$$

$$\tan\varphi = \frac{C \cdot \sin\varphi}{C \cdot \cos\varphi} = \frac{\mathrm{Im}(C \cdot e^{i\varphi})}{\mathrm{Re}(C \cdot e^{i\varphi})} = \frac{\mathrm{Im}(C_1 e^{i\varphi_1} + C_2 e^{i\varphi_2})}{\mathrm{Re}(C_1 e^{i\varphi_1} + C_2 e^{i\varphi_2})}$$

$$\rightarrow \boxed{\tan\varphi = \frac{C_1 \sin\varphi_1 + C_2 \sin\varphi_2}{C_1 \cos\varphi_1 + C_2 \cos\varphi_2}}$$

- $C_1 = C_2 =: C$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, aber $\omega_1 \neq \omega_2$

$$x(t) = C\cos\omega_1 t + C\cdot\cos\omega_2 t$$

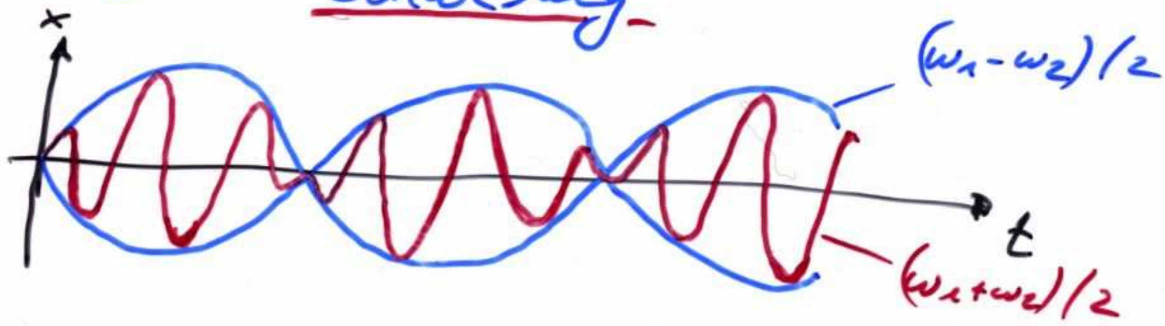
$$= C\cdot\cos\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} + \frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)\cdot t\right]$$

$$+ C\cdot\cos\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]$$

$$= \overset{\circledast}{\ldots} =$$

$$\boxed{x(t) = 2\cdot C\cdot\underbrace{\cos\left[\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t\right]}_{\text{Differenz-frequenz}}\cdot\underbrace{\cos\left[\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot t\right]}_{\text{Summen-frequenz}}}$$

- $\omega_1 \approx \omega_2 \rightarrow$ <u>Schwebung</u>



$$\left[\circledast\; C\cdot\cos\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} + \frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right] + C\cdot\cos\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]\right]$$

$$= C\cdot\left[\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t\right) - \sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot t\right)\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t\right)\right]$$

$$+ C\cdot\left[\underbrace{\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t\right)} + \sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot t\right)\cdot\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t\right)\right]$$

$$= 2\cdot C\cdot\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot t\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t\right)$$

- <u>Fourier-Synthese, Fourier-Analyse</u>

▶ komplizierte Schwingungen können durch Überlagerung harmonischer Schwingungen synthetisiert werden:

→ <u>Fourier-Synthese</u>

$$x(t) = x_0 + x_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + x_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cos(n \cdot \omega t + \varphi_n)$$

z.B.:

$$x(t) = \sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \dots$$

▶ Zerlegung komplizierter Schwingungen in harmonische Schwingungen

→ <u>Fourier-Analyse</u>

$$z_n = a_n + i b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cdot \left[\cos(n\omega t) + i \cdot \sin(n\omega t)\right] dt$$

$$\boxed{z_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cdot e^{in\omega t}\, dt}$$ Fourier-Analyse

$$\rightarrow \boxed{f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n \cdot e^{in\omega t}}$$ Fourier-Synthese