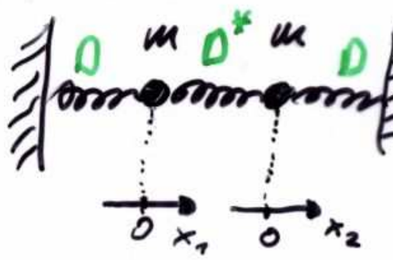
8.5 gekoppelte Schwingungen



Trägheitskräfte:

$$F_{T1} = m\ddot{x}_1 \;,\; F_{T2} = m\ddot{x}_2$$

Rückstellkräfte:

$$F_{D1} = -Dx_1 - D^*x_1 + D^*x_2 = -Dx_1 + D^*(x_2 - x_1)$$

$$F_{D2} = \quad \dots \quad = -Dx_2 + D^*(x_1 - x_2)$$

$$= -Dx_2 - D^*(x_2 - x_1)$$

$$\rightarrow \begin{cases} F_{T1} = F_{D1} \rightarrow & m\ddot{x}_1 + (D+D^*)x_1 - D^*x_2 = 0 \\ F_{T2} = F_{D2} \rightarrow & m\ddot{x}_2 - D^*x_1 + (D+D^*)x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow (*) \boxed{\begin{pmatrix} m\ddot{x}_1 \\ m\ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (D+D^*) & -D^* \\ -D^* & (D+D^*) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

gekoppeltes lineares DGL-System

komplexwertiger Lösungsansatz: ω ist zu bestimmen

$$x_1(t) = X_1 e^{i\omega t} \;,\; x_2(t) = X_2 e^{i\omega t}$$

einsetzen in (*)
$e^{i\omega t}$ kürzen

$$\rightarrow \begin{cases} -\omega^2 m X_1 + (D+D^*)X_1 - D^*X_2 = 0 \\ -\omega^2 m X_2 - D^*X_1 + (D+D^*)X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -\omega^2 m + (D+D^*) & -D^* \\ -D^* & -\omega^2 m + (D+D^*) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

homogenes lineares Gleichungssystem
für Amplituden X_1 und X_2

Lösung für <u>beliebige</u> X_1 und X_2

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} -m\omega^2 + D + D^* & -D^* \\ -D^* & -m\omega^2 + D + D^* \end{pmatrix} = 0$$

(Determinante der Matrix)

$$\Leftrightarrow \left(-m\omega^2 + D + D^*\right)^2 - \left(-D^*\right)^2 = 0$$

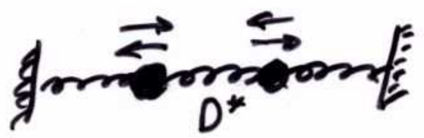
$$\Leftrightarrow -m\omega^2 + D + D^* = \pm D^*$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{D+2D^*}{m}}}$$

<u>Eigenfrequenzen</u> des gekoppelten Schwingungssystems

ω_1: 

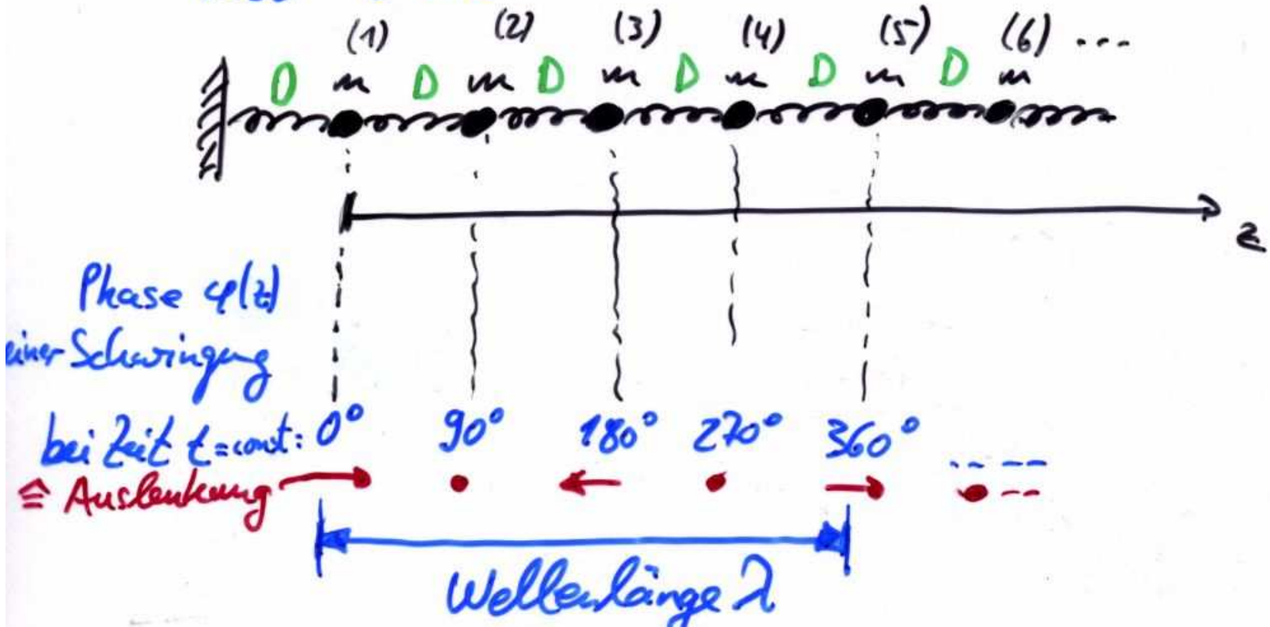
(D^* trägt <u>nicht</u> bei)

ω_2: 

(D^* trägt <u>maximal</u> bei)

8.6 Wellen

Betrachte gekoppelte (äquidistante) Oszillatoren mit $D = D^*$



- Beobachtung: Schwingung von (1) breitet sich auf (2) aus
  — " — von (2) — " — " " (3) aus
  ...
  d.h. Energietransport von $(1) \to (2) \to (3) \to \ldots$
- Schwingungszustand eines einzelnen Oszillators hängt von Zeit t und dem Ort z ab:

$$\boxed{\Psi(z,t) = A \cos(\omega t - \underbrace{kz}_{\text{ortsabh. Phase } \varphi(z)})}$$

$$\Psi(z,t) = C \cdot e^{i(\omega t - kz)}$$

$\Psi(z,t)$ beschreibt eine Welle

Welle: im Raum und Zeit periodische Ausbreitung eines Schwingungs=zustands mit Energietransport, ohne Massentransport

$k := \frac{2\pi}{\lambda}$ Wellenzahl, i.A. ein Vektor in Ausbreitungsrichtung der Welle

λ: Wellenlänge

8.6.1 Harmonische Wellen (vgl. 8.1)

$$\Psi(z,t) = A \cdot \cos(\omega t - kz) = A \cdot \cos\left[\omega \cdot \left(t - \frac{k}{\omega} \cdot z\right)\right]$$

$\rightarrow \frac{\omega}{k}$ entspricht einer Geschwindigkeit

Phasengeschwindigkeit $\boxed{v_{Ph} := \frac{\omega}{k} = f \cdot \lambda}$

$\hat{=}$ Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle

Momentaufnahmen der Welle für $t = t_0, t_1, t_2$