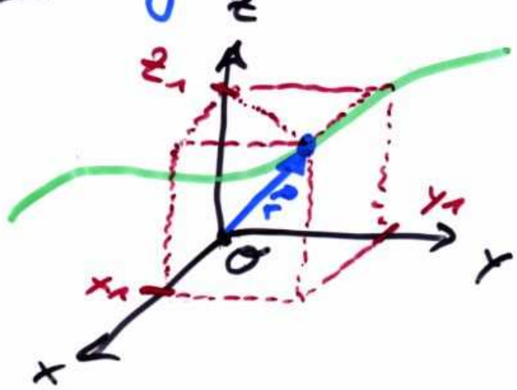
2. Kinematik eines Massenpunktes

Kinematik untersucht Ablauf der Bewegung

Bewegungen: Translation, Rotation

- Beschreibung der Bewegung

▷ Lage des Massenpunktes in kartesischen Koordinaten



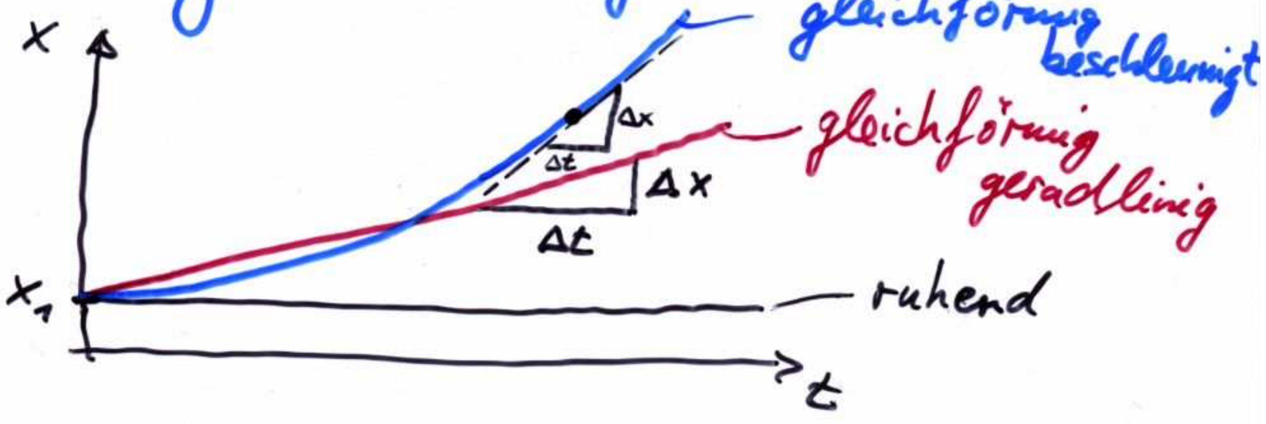
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

andere Koordinatensysteme:

- Kugelkoordinaten (R, φ, Θ)
- Zylinder – " – (R, φ, z)

Weg-Zeit-Diagramm



- Geschwindigkeit: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

  Durchschnittsgeschwindigkeit $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

  (Momentan-)Geschwindigkeit $v := \frac{dx}{dt} =: \dot{x}$

- Beschleunigung: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

  (Momentan-)Beschleunigung: $a := \frac{dv}{dt} =: \dot{v}$

  $$\Rightarrow a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} =: \ddot{x}$$

- Bewegungsgesetze (1-dim)

gleichförmig beschleunigte Bewegung

$$\boxed{a(t) = a = \text{const}}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \rightarrow v(t) = \int a(t')\,dt' = \int a\,dt' = a \cdot t + \text{const}'$$

$$\boxed{v(t) = a \cdot t + v_0}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \longrightarrow x(t) = \int v(t')\,dt' = \int (a \cdot t' + v_0)\,dt'$$

$$= \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + \text{const}''$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0}$$

Die Werte a, v_0, x_0 sind Startwerte;

z.B. gleichförmige Bewegung : $a \stackrel{!}{=} 0$

$$x(t) = v_0 t + x_0$$

$$v(t) = v_0$$

$$a(t) = 0$$

- Bewegung in Ebene / Raum

  - Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung sind Vektoren

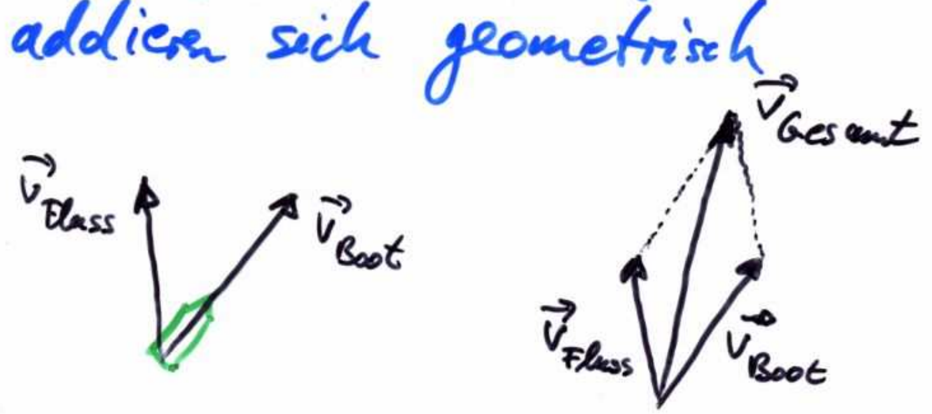
$$\vec{r}(t), \quad \vec{v}(t), \quad \vec{a}(t)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \dot{\vec{r}}(t)$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

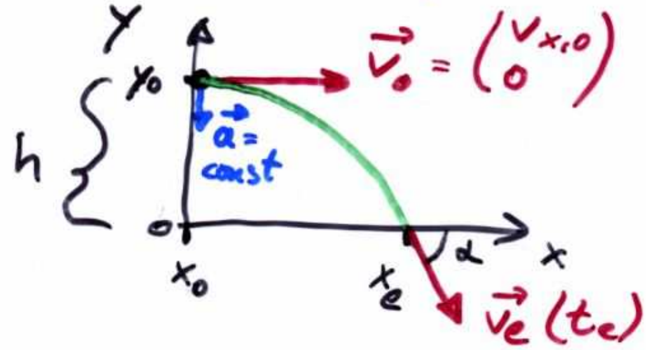
- $\boxed{\text{Superpositionsprinzip}}$

Gleichzeitig verlaufende Bewegungen überlagern sich ungestört und addieren sich geometrisch



$$\vec{v}_{Gesamt} = \vec{v}_{Fluss} + \vec{v}_{Boot}$$

Anwendungsbeispiel: waagrechte Wurf



$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

Startwerte: $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot t^2 + v_{x,0} \cdot t + 0 \\ -\frac{1}{2} g t^2 + 0 \cdot t + h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x,0} \cdot t \\ -\frac{1}{2} g t^2 + h \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} x_e \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Auftreffpunkt}$$

$$\Rightarrow v_{x,0} \cdot t_e \stackrel{!}{=} x_e \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2} g t_e^2 + h \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow t_e^2 = \frac{2h}{g} \rightarrow \boxed{t_e = \sqrt{\frac{2h}{g}}} \quad \text{Flugzeit}$$

$$\rightarrow \boxed{x_e = v_{x,0} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}} \quad \text{Wurfweite}$$

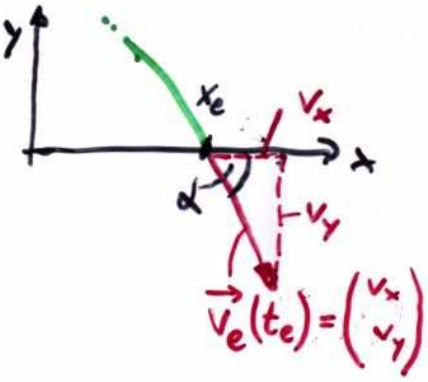
$$\vec{v}_e(t_e) = \vec{a} \cdot t_e + \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot t_e + \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{v}_e(t_e) = \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ -\sqrt{2gh} \end{pmatrix}} \quad \text{Auftreffgeschwindigkeit}$$

$$\rightarrow |\vec{v}_e(t_e)| = \sqrt{v_{x,0}^2 + 2gh}$$

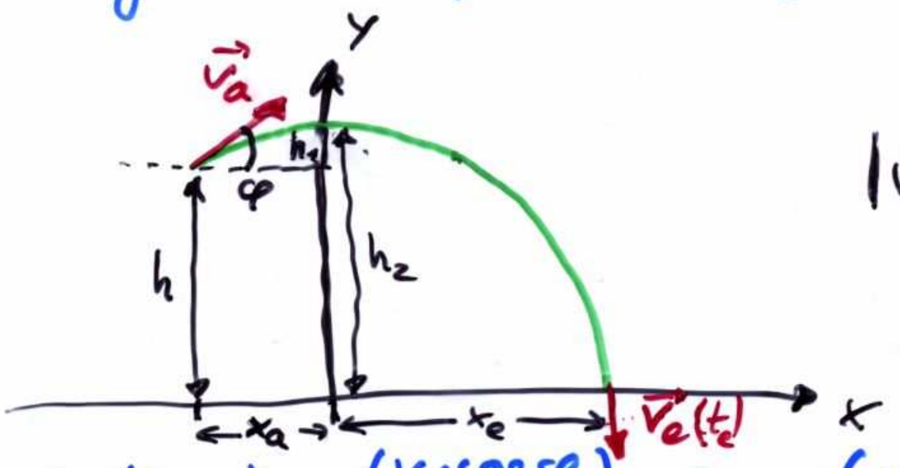
Absolutbetrag der Auftreffgeschwindigkeit

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-\sqrt{2gh}}{v_{x,0}}}$$



Auftreffwinkel α

► "2x" waagerechte Wurf → schräger Wurf



$$|\vec{v}_a| =: v_0$$

$$\vec{v}_a(t=0) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos\varphi \\ v_0 \cdot \sin\varphi \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ +\sqrt{2gh_1} \end{pmatrix} \leftarrow \circledast$$

$$\vec{v}_e(t=t_e) = \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ -\sqrt{2gh_2} \end{pmatrix}$$

$$x_a = v_{x,0} \cdot \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \; ; \; x_e = v_{x,0} \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$$

$$\rightarrow x_w = x_a + x_e = v_{x,0} \cdot \left(\sqrt{\frac{2h_1}{g}} + \sqrt{\frac{2h_2}{g}} \right)$$

aus $\circledast$ $\rightarrow v_0 \cdot \sin\varphi = \sqrt{2gh_1} \rightarrow h_1 = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\varphi}{2g}$

$$h_2 = h + h_1 \longrightarrow h_2 = h + \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\varphi}{2g}$$

$$\rightarrow x_w = v_0 \cos\varphi \cdot \left(\frac{v_0 \sin\varphi}{g} + \sqrt{\frac{2gh}{g^2} + \frac{v_0^2 \sin^2\varphi}{g^2}} \right)$$

Wurf-weite $\boxed{x_w = \frac{v_0^2 \cos\varphi \cdot \sin\varphi}{g} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2\varphi}}\right)}$

$$\cos\varphi \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi$$

NB: Symmetrien in einer Bewegung
können zu einer einfachen Lösung
der Bewegungsgleichungen führen