# Reflexion; stehende Welle

- Wellen werden reflektiert, je nachdem wie die Wellenkette abgeschlossen ist:
  - offenes oder freies Ende

Phasen=verschiebung bei Reflexion 0°

  - geschlossenes oder festes Ende

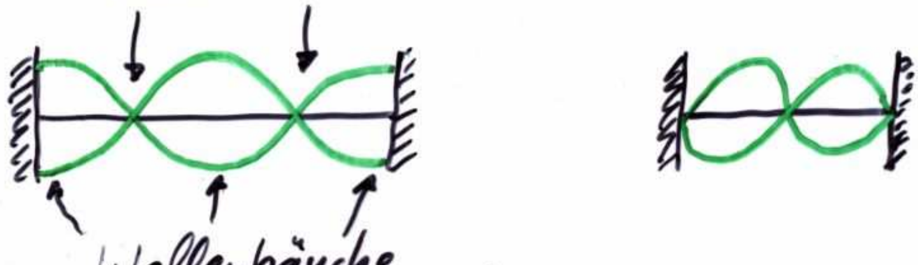
Phasen=verschiebung 180°
→ Phasensprung!

  - geeignet gedämpfter Abschluss

keine Reflexion!

- Hinlaufende und reflektierte Welle überlagern bei geeigneten Frequenz zu stehender Welle

z.B.




Wellenknoten und -bäuche ortsfest!

## 8.6.2 Wellengleichung (d'Alembert Gleichung)

$$\Psi(z,t) = A \cdot \cos(\omega t - kz)$$

- Welle $\hat{=}$ Schwingung in Zeitkoordinate $t \rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \omega^2 \Psi = 0$
- Welle $\hat{=}$ — " — in Ortskoordinate $z \rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + k^2 \Psi = 0$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -\Psi = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{1}{v_{Ph}^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}}$$ Wellengleichung

NB:
$$\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{v_{Ph}^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)}_{=: \Box^2 \text{ d'Alembert Operator}} \Psi = 0 \rightarrow \Box^2 \Psi = 0$$

allg.: $\Box^2 := \frac{\partial^2}{v^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

# 8.6.3 Wellentypen

- **Ebene Wellen**

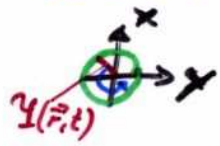
$$\Psi(\vec{r},t) = A \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \overset{\text{z.B. } \vec{k} = k\vec{e}_z}{=} A \cdot \cos(\omega t - kz)$$

- Ausbreitungsrichtung in $\vec{r}$-Richtung

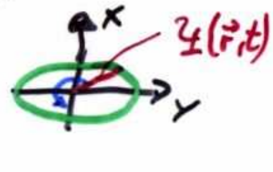

- Auslenkung der Welle (Elongation):

  - longitudinale Wellen "$\Psi \parallel z$"
    (z.B. Schallwellen)

  - transversale Welle "$\Psi \perp z$"
    transversale polarisierte Wellen
    - lineare Polarisation $\Psi \parallel x$ oder $\Psi \parallel y$
    - zirkulare — " —




    - elliptische — " —




- **Kugelwellen** (auch: Elementarwellen)

$$\Psi(\vec{r},t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr) \quad \text{mit } r = |\vec{r}|$$

wg. Energieerhaltung

(Im Abstand r von Quelle ist Gesamtenergie auf Kugeloberfläche $4\pi r^2$ verteilt
→ Intensität der Welle ≙ Energie $\sim \left(\frac{A}{r}\right)^2 \rightarrow 4\pi r^2 \cdot \left(\frac{A}{r}\right)^2 = \text{const.}$)

# Beispiele für Wellen in Medien

Es gilt immer: $$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{1}{v_{ph}^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

- elastische Longitudinalwelle (in festen Körpern)

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$ ; $E$: Elastizitätsmodul
$\rho = \frac{m}{V}$ : Dichte

- Transversalwelle einer Saite

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

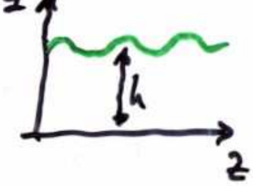
$F$: mech. Spannung bzw. Spannkraft der Saite
$\mu = \frac{m}{L}$ : lineare Massendichte

- Schallwellen in Gasen

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{p}{\rho}\cdot\kappa}$$

$p$: Gasdruck
$\rho$ : Dichte
$\kappa$ : Adiabatenkoeffizient ($\kappa = 1.4$ für Luft)

- Wasserwellen (Oberflächenwellen)




$$v_{ph} = \sqrt{\left(\frac{g\cdot\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\cdot\sigma}{\rho\cdot\lambda}\right)\cdot\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho}\right)\cdot\tanh(kh)} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$h$: Wassertiefe, $\sigma$: Oberflächenspannung

NB: $v_{ph} = v_{ph}(\lambda) = v_{ph}(k) \longrightarrow$ Dispersion

Näherungen:

- untiefe Flüssigkeiten (Flachwasserwellen)

  $v_{ph} = \sqrt{g \cdot h}$ für $h \ll \lambda$, keine Dispersion

- tiefe Flüssigkeiten

  $v_{ph} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{k}}$ für $h \gg \lambda$, normale Dispersion ($v_{ph} \sim \sqrt{\lambda}$)

- Kapillarwellen

  $v_{ph} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}} = \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho}}$ für $\lambda \ll h$ und $\lambda \ll \sqrt{\frac{\sigma}{g\rho}}$

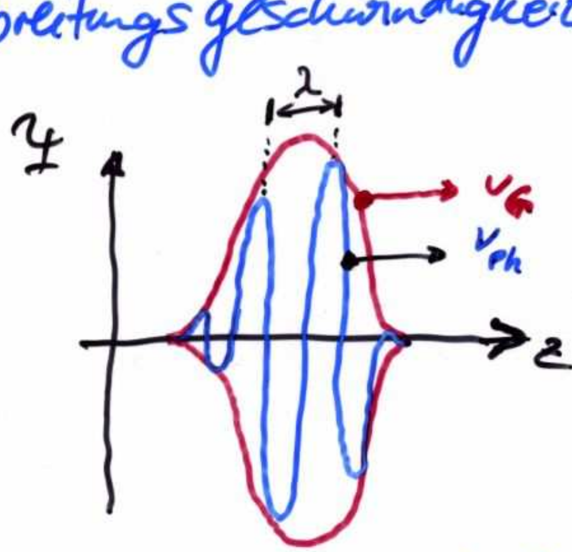
  anomale Dispersion $\left(v_{ph} \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$

# 8.6.4 Dispersion, Gruppengeschwindigkeit

Falls Phasengeschwindigkeit $v_{Ph}$ von Wellenlänge abhängig $\longrightarrow$ **Dispersion**

und $\boxed{v_{Ph} = v_{Ph}(\lambda) = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega \cdot \lambda}{2\pi}}$ Dispersionsrelation

Dispersion hat insbesondere Auswirkungen auf Aufbreitungsgeschwindigkeit von Wellengruppen (= impulsartige lokale Störung)




Wellengruppe: Überlagerung unendlich vieler harmonischer Wellen mit Frequenzen

$$\omega_m - \frac{\Delta\omega}{2} < \omega < \omega_m + \frac{\Delta\omega}{2}$$

$\omega_m$: Mittenfrequenz
$\Delta\omega$: Frequenzintervallbreite
$\rightarrow$ kontinuierliche Fouriertransf.

Wellengruppe (d.h. Einhüllende) breitet sich mit Gruppengeschwindigkeit $\boxed{v_G = \frac{d\omega}{dk}}$ aus!

Mit $v_{Ph} = \frac{\omega}{k} \longrightarrow v_G = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(v_{Ph} \cdot k)}{dk}$

$$\boxed{v_G = v_{Ph} + k \cdot \frac{dv_{Ph}}{dk} = v_{Ph} - \lambda \frac{dv_{Ph}}{d\lambda}}$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

- $\frac{dv_{Ph}}{d\lambda} = 0 \rightarrow$ keine Dispersion
- $v_G < v_{Ph} \rightarrow$ normale Dispersion
- $v_G > v_{Ph} \rightarrow$ anomale Dispersion