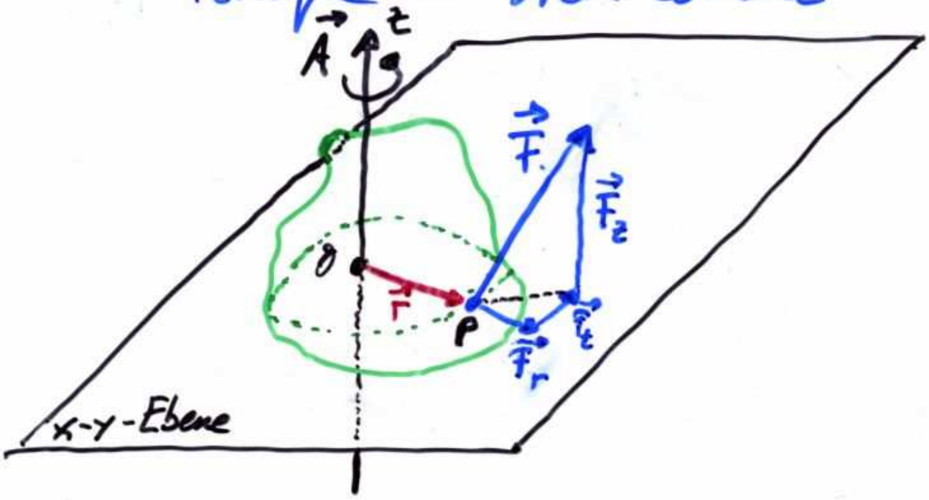
9.1 Drehmoment

- Kräfte → Drehmoment



$\vec{F}_r \parallel \vec{r} \rightarrow \vec{r} \times \vec{F}_r = 0$

$\vec{F}_z \parallel \vec{A}$ ($\hat{=}$ z-Achse)

$\vec{F}_t \perp \vec{r}$, $\vec{F}_t \perp \vec{A}$

→ Drehmoment

$$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \left(\vec{F}_r + \vec{F}_t + \vec{F}_z \right)$$

$$= \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}_t}_{\parallel \vec{A}} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}_z}_{\perp \vec{F}_t}$$

Falls Drehachse $\vec{A}$ durch $\underbrace{\text{Schwerpunkt } S}_{\text{d.h. } \vec{r}_S = 0}$ verläuft und $\vec{F} = -M\vec{g}$:

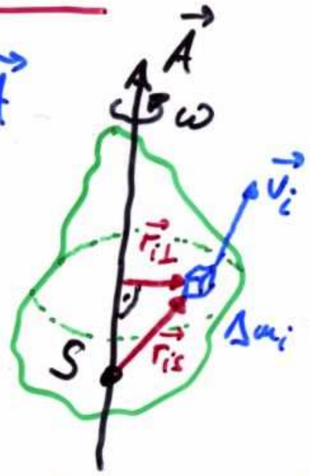
$$\vec{D} = -\int_M \vec{r} \times \vec{g}\, dm = \vec{g} \times \int_M \vec{r}\, dm = \vec{g} \times M\vec{r}_S = 0$$

→ stabile Lage des Körpers

NB: Falls $\vec{A}$ nicht durch S → Unwucht

↳ Kräfte vom Achslager aufzunehmen

9.2 Rotationsenergie, Trägheitsmoment



- starrer Körper rotiert um feste Achse $\vec{A}$

→ kinetische Energie der Rotation:

$$E(\Delta m_i) = \frac{1}{2}\Delta m_i \cdot v_i^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i (r_{i\perp}\cdot\omega)^2$$

$\sum \Delta m_i \to \int ... dm$

$$\leadsto \boxed{E_{rot} = \frac{1}{2}\omega^2 \cdot \underbrace{\int_M r_\perp^2\, dm}_{=:I} = \frac{1}{2}\omega^2 \cdot I}$$ Rotationsenergie

mit $\boxed{I := \int_M r_\perp^2\, dm}$ Trägheitsmoment

z.B.
- Vollzylinder

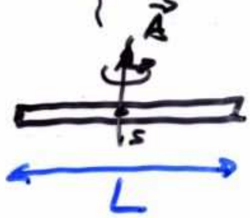
$I_S = \frac{1}{2} M R^2$

↳ Achse durch Schwerpkt.

- Hohlzylinder (Wanddicke $d \ll R$)

$I_S = M R^2$

- dünner Stab

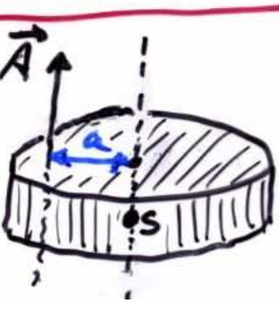


$I_S = \frac{1}{12} M L^2$

- Falls Drehachse $\vec{A}$ im Abstand a vom Schwerpunkt

$$\boxed{I_A = I_S + a^2 \cdot M}$$ Steinerscher Satz

z.B.



9.3 Drehimpuls, Trägheitstensor

- **Drehimpuls** $\vec{L} = \int \vec{r}_\perp \times d\vec{p} = \int \vec{r}_\perp \times \vec{v}\, dm$ $\quad \begin{pmatrix} \vec{r}_\perp \perp \vec{A} \\ \vec{r}_\perp \perp \vec{\omega} \end{pmatrix}$

$$= \int \vec{r}_\perp \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\perp)\, dm$$

$$= \int \vec{\omega}\, r_\perp^2\, dm - \int \vec{r}_\perp \cdot \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\perp)}_{=0} dm$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{\omega} \cdot \int_M r_\perp^2\, dm = \vec{\omega} \cdot I}$$

- **Drehimpulserhaltung** $\vec{L} = \text{const}$ ohne äußere Kräfte

- Trägheitsmoment beliebiger (i.A. nicht-rotationssym.) Körper

$$\vec{L} = \ldots = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, dm = \int \left[r^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega}\vec{r}) \cdot \vec{r} \right] dm$$

$$= \int \left[\underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{= r^2} \cdot \vec{\omega} - (x \cdot \omega_x + y \cdot \omega_y + z \cdot \omega_z)\, \vec{r} \right] dm$$

$$= \int \begin{bmatrix} (r^2 - x^2)\,\omega_x - xy\,\omega_y - xz\,\omega_z \\ -yx\,\omega_x + (r^2 - y^2)\,\omega_y - yz\,\omega_z \\ -zx\,\omega_x - zy\,\omega_y + (r^2 - z^2)\,\omega_z \end{bmatrix} dm$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}}_{=: \tilde{I} \text{ Trägheitstensor}} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \tilde{I} \cdot \vec{\omega}$$

mit $I_{xx} := \int (r^2 - x^2)\, dm$, $I_{yy} := \int (r^2 - y^2)\, dm$, ...

$I_{xy} := -\int xy\, dm$, $I_{xz} := -\int xz\, dm$, ...

$I_{yx} := -\int yx\, dm \equiv I_{xy}$, $I_{xz} \equiv I_{zx}$, ...

Trägheitstensor kann diagonalisiert werden durch geeignet zu wählende Haupt(koordinaten)achsen:

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & \cdots \\ & \ddots & \\ & & I_{zz} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{pmatrix}$$

mit $I_a \leq I_b \leq I_c$

NB: Hauptachse ≙ freie Achsen

freie Achse ≙ raumfesten Drehachsen bei Rotation mit $\vec{\omega} = \mathrm{const}$ (ohne Achslagerung)

(raumfesten Drehachsen sind nicht notwendigerweise stabil)

NB: I_a, I_b, I_c folgen aus Lösung von [≙ Eigenwertproblem!]

$$\det \begin{pmatrix} I_{xx}-I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy}-I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}-I \end{pmatrix} = 0$$

Determinante ergibt Polynom 3. Grades → 3 Nullstellen bei $I = I_a, I_b, I_c$

Mit den 3 Haupt-Trägheitsachsen und den Trägheitsmomenten I_a, I_b, I_c kann der starre Körper durch ein Ellipsoid ersetzt werden, welches gleiches Verhalten bei Rotation um eine beliebige Achse zeigt wie der betrachtete starre Körper

z.B.

Trägheitsellipsoid ($I_a = I_b < I_c$)

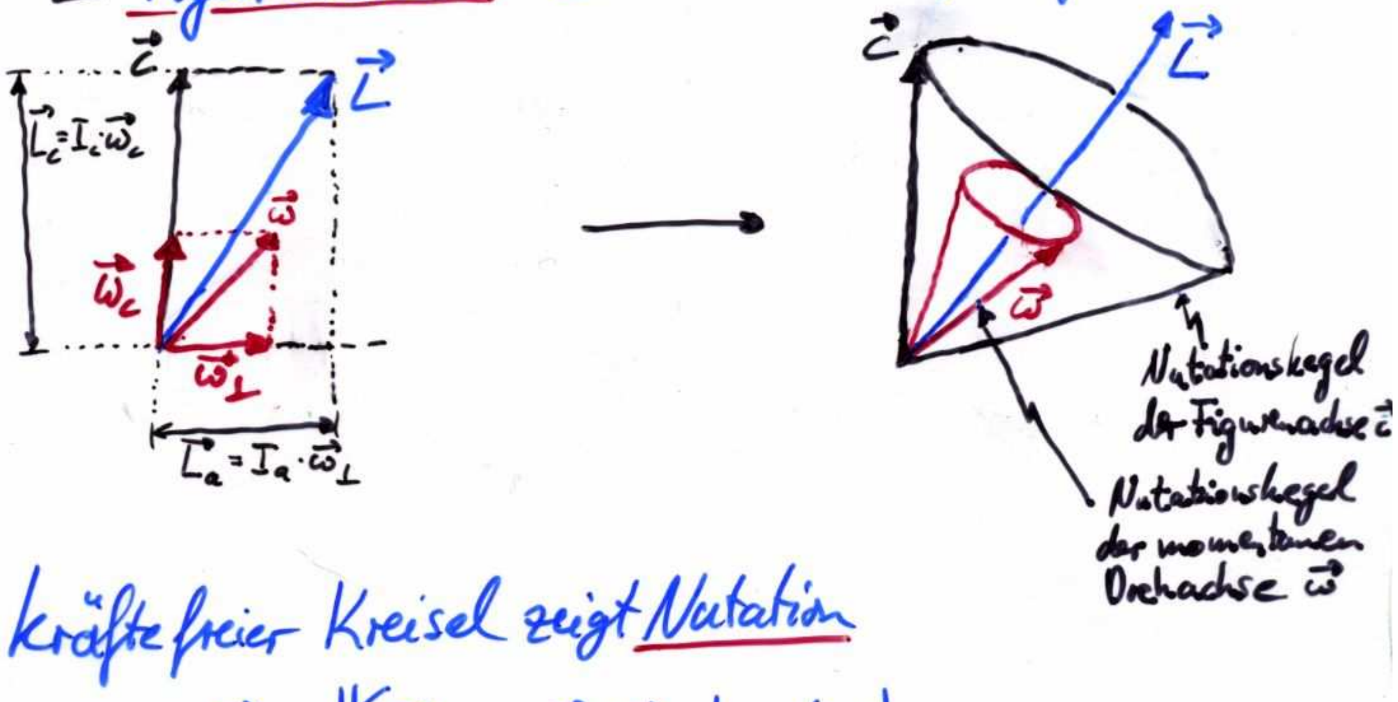
9.4 Kreisel: Nutation, Präzession

Kreisel: i.a. rotationssym → Trägheitsmomente
(z.B. um Hauptachse $\vec{c}$) $I_a = I_b \neq I_c$

- **kräftefreier Kreisel**: im Schwerpunkt S unterstützt, ohne äußeres Drehmoment $\vec{D}$
  → Drehimpuls $\vec{L} = const$
  ($\vec{L}$ ist raumfest)

allgemeine Beschreibung des kräftefreien Kreisels besitzt:

- Drehimpulsachse $\vec{L}$: raumfest, da $\vec{L} = const$
- momentane Drehachse $\vec{\omega}$: i.a nicht raumfest
- Figurenachse $\vec{c}$: nur raumfest, falls $\vec{c} \parallel \vec{L}$



kräftefreier Kreisel zeigt Nutation

wenn $\vec{\omega} \nparallel \vec{c}$: $\vec{\omega}, \vec{c}$ beschreiben Nutationskegel um $\vec{L}$