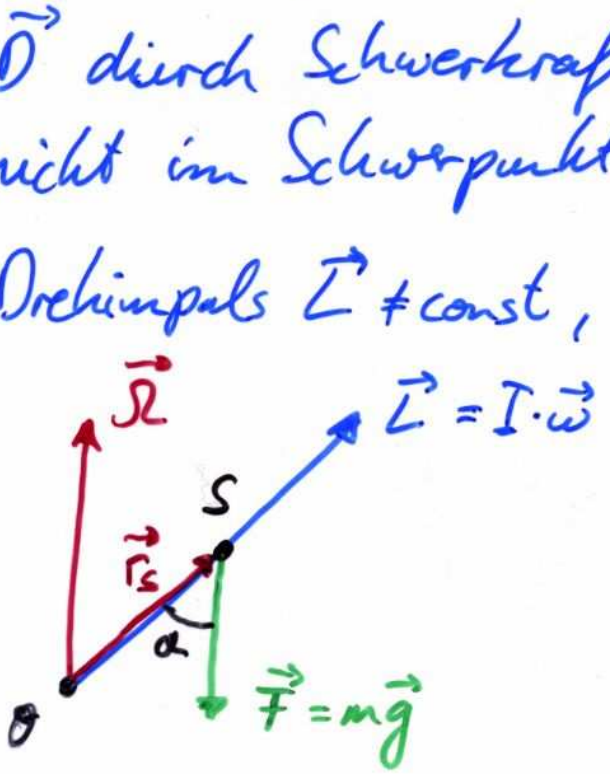
- <u>Kreisel mit äußerem Drehmoment</u>

z.B. $\vec{D}$ durch Schwerkraft, falls Kreisel nicht im Schwerpunkt S unterstützt:

→ Drehimpuls $\vec{L} \neq \text{const}$, aber $L = |\vec{L}| = \omega \cdot I = \text{const}$!



Drehmoment $\vec{D} = \vec{r}_s \times \vec{F} = \vec{r}_s \times m\vec{g}$

→ Richtung von $\vec{D} \perp$ $\vec{r}_s$-$\vec{F}$-Ebene

→ $\vec{D} \perp \vec{L}$ → $\vec{L}$ rotiert um $\vec{\Omega}$: <u>Präzession</u>

$$\vec{D} = \dot{\vec{L}} = \vec{r}_s \times \vec{F} = r_s \cdot \left(\frac{\vec{L}}{L}\right) \times F \cdot \left(\frac{-\vec{\Omega}}{\Omega}\right) = -\frac{r_s F}{L\Omega}(\vec{L} \times \vec{\Omega})$$

$$\rightarrow \boxed{\Omega = |\vec{\Omega}| = \frac{r_s F}{L} = \frac{r_s \cdot mg}{I \cdot \omega}}$$ <u>Präzessions-frequenz</u>

$$\dot{\vec{L}} = -\frac{r_s F}{L\Omega} \cdot (\vec{L} \times \vec{\Omega}) \rightarrow \ddot{\vec{L}} = \frac{r_s F}{L\Omega} \cdot (\vec{\Omega} \times \dot{\vec{L}}) = -\left(\frac{r_s F}{L\Omega}\right)^2 \cdot \left[\vec{\Omega} \times (\vec{L} \times \vec{\Omega})\right] = -\left(\frac{r_s F}{L\Omega}\right)^2 \cdot \left[\vec{L}\Omega^2 - \vec{\Omega}(\vec{L} \cdot \vec{\Omega})\right]$$

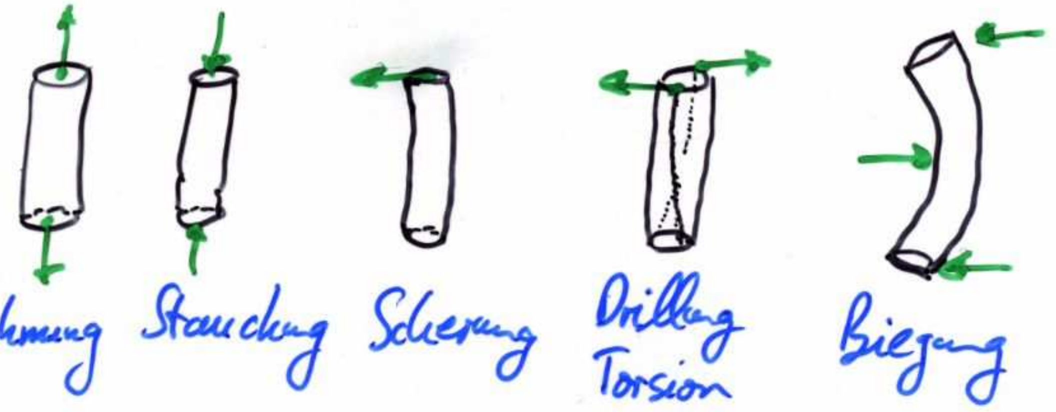
Zerlege $\vec{L} = \vec{L}_{\parallel\Omega} + \vec{L}_{\perp\Omega} \rightarrow \ddot{\vec{L}} = \underbrace{\ddot{\vec{L}}_{\parallel\Omega}}_{=0} + \ddot{\vec{L}}_{\perp\Omega} = -\left(\frac{r_s F}{L\Omega}\right)^2 \cdot \left[(\vec{L}_{\parallel\Omega} + \vec{L}_{\perp\Omega})\Omega^2 - \vec{\Omega} \cdot (\vec{L}_{\parallel\Omega} \cdot \vec{\Omega} + \underbrace{\vec{L}_{\perp\Omega} \cdot \vec{\Omega}}_{=0})\right]$

$$\rightarrow \ddot{\vec{L}}_{\perp\Omega} = -\left(\frac{r_s F}{L\Omega}\right)^2 \cdot \left[\underbrace{\vec{L}_{\parallel\Omega}\Omega^2 - \vec{\Omega}(\vec{L}_{\parallel\Omega} \cdot \vec{\Omega})}_{=0} + \vec{L}_{\perp\Omega} \cdot \Omega^2\right]$$

→ $\ddot{\vec{L}}_{\perp\Omega} + \left(\frac{r_s F}{L}\right)^2 \vec{L}_{\perp\Omega} = 0$ entspricht Schwingungs-DGL → $\Omega = \left(\frac{r_s F}{L}\right)$

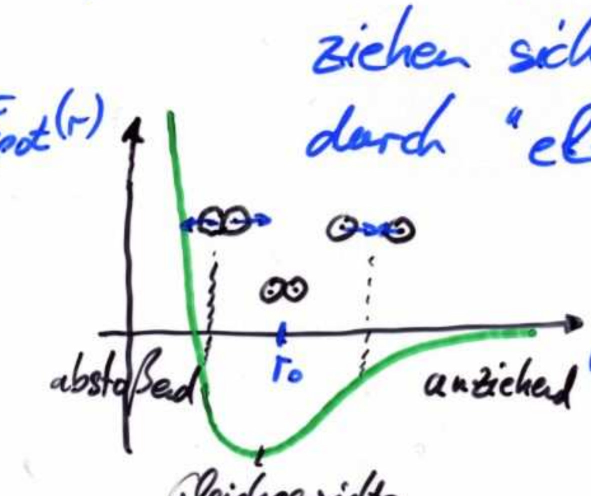
10 Mechanik deformierbarer Medien

Grundtypen der Deformation:



10.1 Der Elastizitätsmodul, Hookesches Gesetz

Mikroskopisch: Atomen/Molekülen
ziehen sich an/stoßen sich ab
durch "elektrostatische" Kräfte

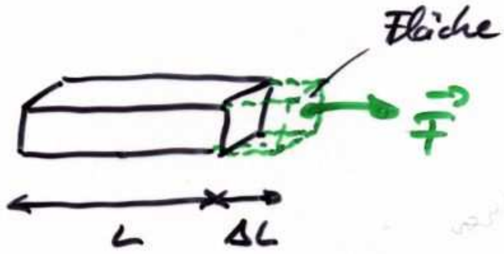


Minimum des Potentials E_{pot} ist näherungsweise parabelförmig: $E_{pot}(r) = \frac{D}{2}(r_0 - r)^2 + const$

$\vec{F} = -\text{grad}\, E_{pot} \rightarrow F(r) = D\cdot(r_0 - r) = D \cdot \Delta r$

entspricht Federkraft!

→ Deformation von Körpern mit makroskop. Größen



$F = D \cdot \Delta L$ gemäß mikroskop. Modell

makroskop. Eigenschaften der Federkonstanten D:

- $D \sim A$
- $D \sim \frac{1}{L}$

$\Big\} \Rightarrow \frac{DL}{A} = \text{const}$

$$\Rightarrow \boxed{F = D \cdot \Delta L = A \cdot \underbrace{\frac{D \cdot L}{A}}_{=:\ \text{Elastizitätsmodul } E,\ [E] = N/m^2} \cdot \frac{\Delta L}{L} =: \frac{A \cdot E}{L} \cdot \Delta L}$$

Hookesches Gesetz

Mit mechanischer (Zug- / Druck-) Spannung $\sigma := \frac{F}{A}$

und relativer Dehnung: $\varepsilon := \frac{\Delta L}{L}$

$$\longrightarrow \boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon} \quad \text{Hookesches Gesetz}$$

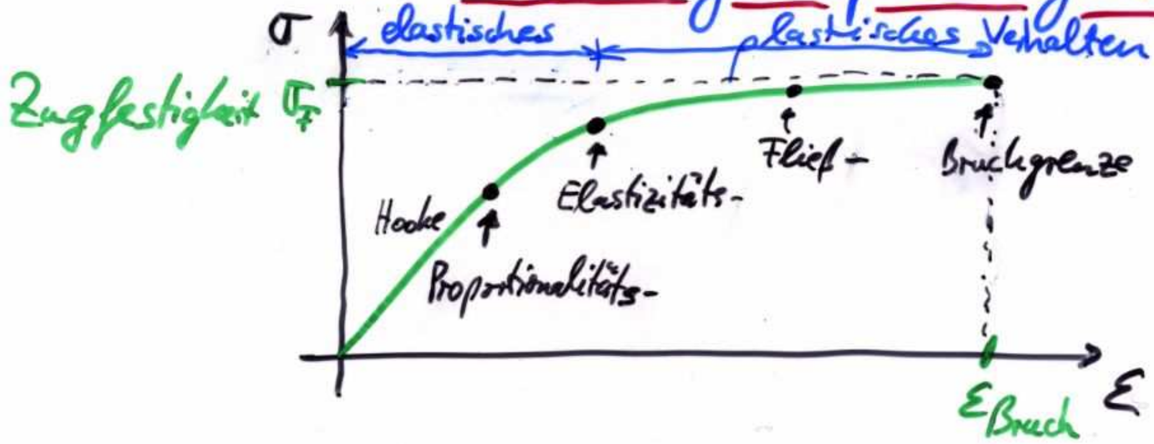
Material	$E\ [\cdot 10^9 \frac{N}{m^2}]$	ε_{Bruch}
Aluminium	72	0.5
V2A-Stahl	195	0.45
Kupfer (kalt gezogen)	126	0.02
Quarzglas	76	...

NB: zu große Dehnung

↳ Abweichungen vom parabelförmigen Potential

↳ nicht-lineares Kraftgesetz

⇒ (vereinfachtes) Dehnungs-Spannungsdiagramm

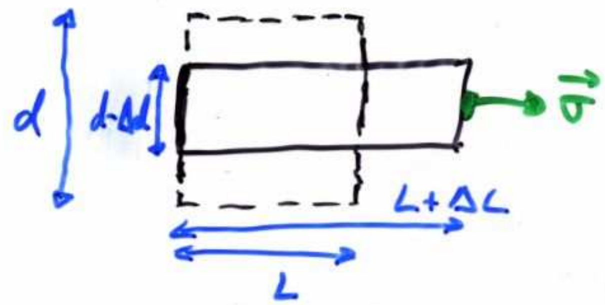


NB: Nach plastischer Verformung bleibt Restdeformation $\varepsilon_R \neq 0$

10.2 Querkontraktion, Poissonzahl

- Unter Dehnung kontrahiert Körper in Querrichtung: Querkontraktion

beschrieben durch $\boxed{\mu := -\frac{\Delta d}{d} \Big/ \frac{\Delta L}{L}}$ Poisson-Zahl



→ Volumenänderung durch Zugspannung $\vec{\sigma}$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{2\Delta d}{d} = \frac{\sigma}{E}(1-2\mu)$$

[$V = L \cdot d^2 \rightarrow \Delta V = d^2 \cdot \Delta L + L \cdot 2d \cdot \Delta d$

$$\rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta L}{L} - 2\mu\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta L}{L}(1-2\mu) = \frac{\sigma}{E}(1-2\mu)$$]

10.3 Kompressibilität, Kompressionsmodul

- Unter allseitigen Druck $\Delta p = -\sigma$ folgt

[Körper in allen drei Richtungen gleichartig durch Druck Δp gestaucht. Querkontraktion widersetzt sich Stauchung und vergrößert Volumen ein wenig.]

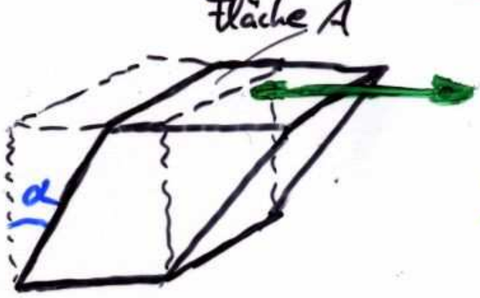
$$\rightarrow \frac{\Delta V}{V} = -\frac{3\Delta p}{E}(1-2\mu) =: -\kappa \cdot \Delta p$$

$\boxed{\kappa := \frac{3}{E}(1-2\mu)}$ Kompressibilität

$\boxed{K := -\frac{\Delta p}{\Delta V} \cdot V = \frac{E}{3(1-2\mu)} = \frac{1}{\kappa}}$ Kompressionsmodul

10.4 Schub-/Scher-/Torsionmodul

Scherung:



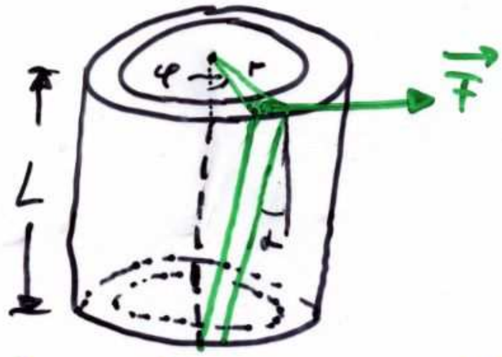
$\vec{\tau} := \frac{\vec{F}}{A}$ Scherspannung

Scherwinkel α:

$$\tau = G \cdot \alpha$$

Schubmodul G (auch: Scher= modul)

Torsion:



$$\tau = G \cdot \alpha = G \cdot \frac{r \cdot \varphi}{L}$$

(auch: Torsionsmodul)

Schub-/Scher-/Torsionsmodul:

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{3K}{2} \cdot \frac{1-2\mu}{1+\mu}}$$