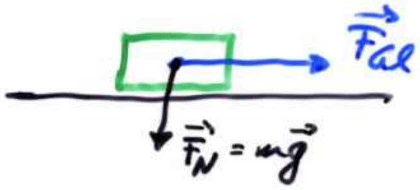
- Arbeit bei Reibung



$$W = \int \vec{F}\, d\vec{s} = \int F_{Ae}\, ds = \int \mu_G \cdot F_N\, ds = \mu_G \cdot mg \cdot s$$

$$\rightarrow \quad W \sim s \quad , \quad W \sim F_N$$

- Stokes-Reibung (oder: viskose Reibung)

NB: nicht zu große Körper, nicht zu schnell bewegt

z.B.: Kugel, Radius R in Fluid mit Viskosität η

$$\boxed{F_{Stokes} = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot \underset{\uparrow\,\text{Geschwindigkeit}}{v}} \rightsquigarrow F_{Stokes} \sim v$$

- Newton-Reibung

NB: schnellere Bewegung größerer Körper durch Fluid

$$\boxed{F_{Newton} = \frac{1}{2}\, c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2} \rightarrow F_{Newton} \sim v^2$$

c_w: Widerstandsbeiwert, von Form des Körpers abhängig

ρ: Dichte des Fluid

A: Querschnittsfläche des Körpers

z.B.

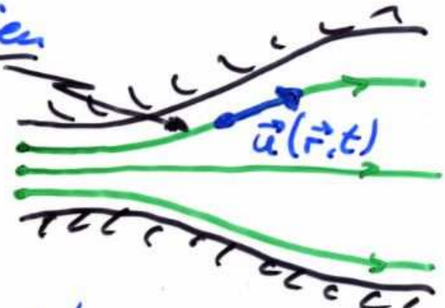
$c_w = 1.17$ $\qquad$ $c_w = 0.05$

12 Hydro-/Aerodynamik

... beschreibt Strömungen von Fluiden

Charakterisierung:

- Strömungsfeld mit Stromlinien
- Strömungsgeschwindigkeit
  $\vec{u}(\vec{r},t)$



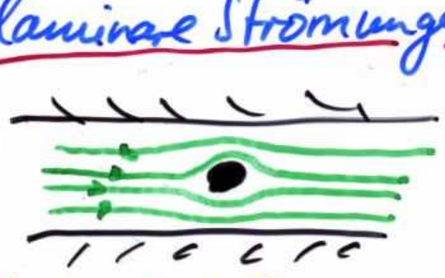
NB: • $\vec{u}(\vec{r},t)$ ist ortsabhängig!

• Falls $\vec{u}(\vec{r},t) = \vec{u}(\vec{r})$, unabhängig von Zeit t

→ stationäre Strömung

Man unterscheidet

- Arten von Fluids
  - ideale Flüssigkeiten/Gase: vernachlässigbare Reibungskräfte zw. Teilchen
  - viskosen/zähen Flüssigkeiten: starke/überwiegende Reibungskräfte
- Arten von Strömungen
  - laminare Strömungen: Reibungskräfte $\gg$ Beschleunigungskräfte



  - turbulente Strömungen: Reibung < Beschleunigung

← Wirbel

12.1 Ideale Flüssigkeiten

12.1.1 Euler-Gleichung

Bewegungsgleichung für Teilchen in idealen Flüssigkeiten

Kräfte auf Teilchen:

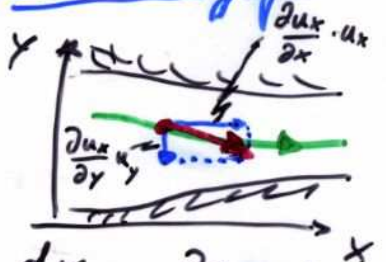
- Schwerkraft: $\vec{F}_G = \Delta m \cdot \vec{g}$
- Druckgradient: $\vec{F}_p = -\vec{\nabla}p \cdot dV = -\operatorname{grad} p \cdot dV$
$= -(\vec{\nabla}p) \cdot \frac{\Delta m}{\rho}$

z.B. Druckänderung entlang x-Richtung

$p(x+dx) = p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx$ und $p(x) = p$

$\rightarrow F_x = [p(x) - p(x+dx)] \cdot dA = \left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right)\right] \cdot dx\, dy = -\frac{\partial p}{\partial x} dx\, dy\, dz$
$= -\frac{\partial p}{\partial x} dV$

- Beschleunigungskraft: Zeit- und ortsabhängig!



z.B. in x-Richtung

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{u_x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{u_y} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{u_z}$$

$$\longrightarrow \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}\right) u_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + (\vec{u}\,\vec{\nabla}) u_x$$

dito für y, z-Richtung $\Big\} \rightarrow$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{u}\,\vec{\nabla})\vec{u}}_{} \overset{!}{=} \frac{\vec{F}_G}{\Delta m} + \frac{\vec{F}_p}{\Delta m}$$

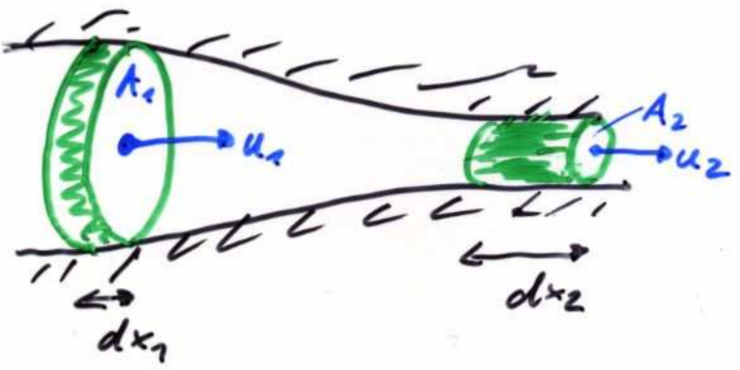
$\hat{=}\ \vec{u} \cdot (\vec{\nabla}\vec{u}) = \vec{u} \cdot (\operatorname{grad} \vec{u})$ mit Tensor $\operatorname{grad} \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}(\vec{\nabla}p)}$$

Euler-Gleichung

der Hydrodynamik

12.1.2 Kontinuitätsgleichung



Masse in Scheiben:

$$dm = \rho_1 \cdot A_1 \cdot dx_1 \overset{!}{=} \rho_2 \cdot A_2 \, dx_2 = dm$$

$$\rightarrow \frac{dm}{dt} = \rho_1 \cdot A_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = \rho_1 A_1 u_1 \overset{!}{=} \rho_2 A_2 \cdot u_2 = \rho_2 A_2 \cdot \frac{dx_2}{dt}$$

$$\rightarrow \boxed{\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2} \xrightarrow[\text{Flüssigkeiten}]{\text{inkompressible}} \boxed{A_1 u_1 = A_2 u_2} = \text{const}$$

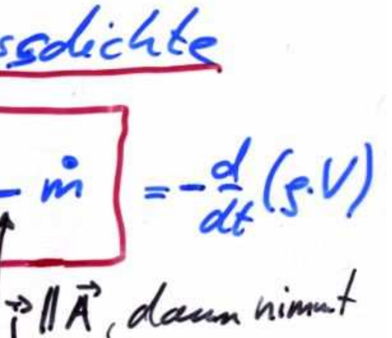
makroskopische Kontinuitätsgleichung

- (Massen-) Stromdichte / (Massen-) Flussdichte

$$\boxed{\vec{j} := \rho \cdot \vec{u}} \quad \text{mit} \quad \boxed{\int_A \vec{j} \, d\vec{A} = -\dot{m}} = -\frac{d}{dt}(\rho \cdot V)$$

Wenn $\vec{j} \parallel \vec{A}$, dann nimmt Masse im eingeschlossenen Volumen ab!

$$\int_A \vec{j} \, d\vec{A} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz von} \\ \text{Gauß-Ostrogradski}}}{=} \int_V (\vec{\nabla} \vec{j}) \cdot dV \overset{!}{=} -\dot{m} \overset{V=\text{const}}{=} -\dot{\rho} V$$



$$\left. \frac{d}{dV} \right| \rightarrow \boxed{\dot{\rho} + \vec{\nabla} \vec{j} = \dot{\rho} + \operatorname{div} \vec{j} = 0} \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

NB: (Volumen-) Stromstärke $I := -\frac{1}{\rho} \int \vec{j} \, d\vec{A} = +\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho \cdot V) \overset{\rho=\text{const}}{=} \frac{dV}{dt}$

12.1.3 Bernoulli-Gleichung

Betrachte stationäre Strömung, d.h. $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \dot{\vec{u}} = 0$

→ Euler-Gleichung

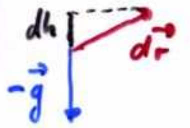
$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\vec{\nabla})\cdot\vec{u} = (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = \vec{\nabla}\left(\frac{\vec{u}^2}{2}\right) - \vec{u}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u}) \overset{!}{=} \vec{g} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$$

$\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{u}^2}{2}\right)$: z.B. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\vec{u}^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x^2+u_y^2+u_z^2}{2}\right) = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \rightarrow \vec{\nabla}\left(\frac{\vec{u}^2}{2}\right) = \vec{u}(\vec{\nabla}\vec{u})$

$\vec{u}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u}) = \vec{u}\cdot(\vec{\nabla}\vec{u}) - (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u}$ Beachte, dass $\vec{\nabla}$ immer auf ein $\vec{u}$ wirkt!

$\Rightarrow \vec{\nabla}\left(\frac{\vec{u}^2}{2}\right) - \vec{u}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u}) = \vec{u}(\vec{\nabla}\vec{u}) - \left[\vec{u}\cdot(\vec{\nabla}\vec{u}) - (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u}\right] = (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = \vec{u}\cdot\mathrm{grad}\,\vec{u}$

$$|\cdot d\vec{r} \mathrel{\hat{=}} |\cdot\vec{u}\,dt \rightarrow \underbrace{\vec{\nabla}\left(\frac{u^2}{2}\right)\cdot d\vec{r}}_{d\left(\frac{u^2}{2}\right)} - \underbrace{\left[\vec{u}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u})\right]\cdot\vec{u}\,dt}_{\vec{u}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u})\perp\vec{u}} - \underbrace{\vec{g}\,d\vec{r}}_{} + \underbrace{\frac{1}{\rho}(\vec{\nabla}p)\,d\vec{r}}_{} = 0$$



$$\rightarrow d\left(\frac{u^2}{2}\right) - 0 + g\,dh + \frac{1}{\rho}dp = 0$$

$\int d\vec{r}$ entlang Stromröhre $\rightarrow$

$$\boxed{\frac{1}{2}(u^2 - u_0^2) + g(h-h_0) + \int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho(p)} = 0}$$

Bernoulli-Gleichung

inkompressible Flüssigkeit, $\rho = \mathrm{const}$ $\rightarrow$ $\boxed{\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho\cdot g h + p = \mathrm{const}}$

NB: vgl. Energieerhaltung: $E_{kin} + E_{pot} + p\cdot V = \frac{1}{2}mu^2 + mgh + pV = \mathrm{const}$

$$|\cdot\frac{1}{V} \rightarrow \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho\cdot gh + p = \mathrm{const}$$

Bernoulli-Gleichung ≙ Energieerhaltung in Hydrodynamik