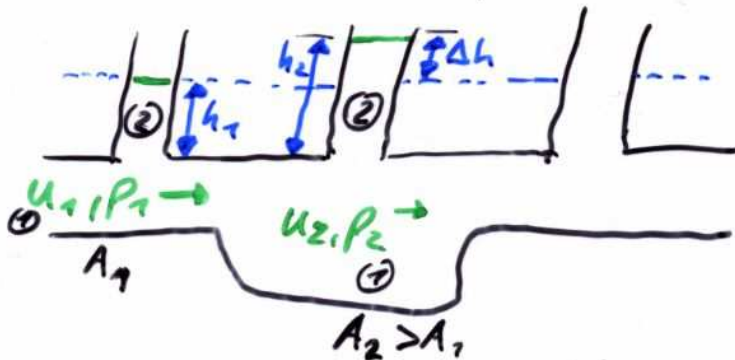


Beispiele der Anwendung der Bernoulli-Gl.

- Staudruck $p_s = \rho \cdot \frac{u^2}{2}$



$$\textcircled{1}: \rho \frac{u_1^2}{2} + p_1 = \rho \frac{u_2^2}{2} + p_2$$

$$u_1 A_1 = u_2 A_2 \rightarrow u_2 = u_1 \frac{A_1}{A_2}$$

$$u_2 < u_1$$

$$\rightarrow \Delta p := p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2} (u_1^2 - u_2^2)$$

$$\rightarrow \Delta p > 0$$

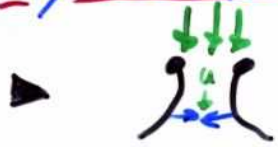
$$\textcircled{2}: 0 + p_1 = p_0 + \rho g h_1$$

$$0 + p_2 = p_0 + \rho g h_2$$

$$\rightarrow \Delta h := h_2 - h_1 = \frac{1}{\rho g} (p_2 - p_1)$$

$$\rightarrow \Delta h = \frac{1}{2g} (u_1^2 - u_2^2) > 0$$

- hydrostatisches Paradoxon



Luftstrom zwischen zwei Blätter

→ Blätter werden zusammengedrückt

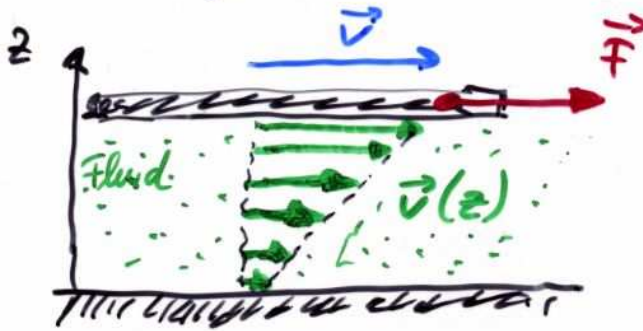


$$\frac{1}{2} \rho u^2 + p = \text{const}$$

12.2 Dynamische Zähigkeit, Viskosität

- Viskosität / Zähigkeit beschreiben innere Reibung

→ bewegte Flüssigkeiten/Gase haben dynamische Scherspannung $\vec{\tau}$



$$\vec{\tau} = \frac{\vec{F}}{A} = \eta \cdot \frac{d\vec{v}}{dz}$$

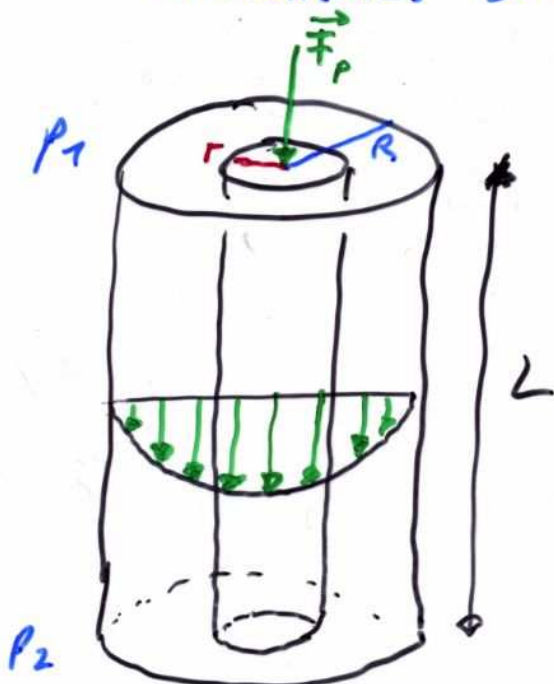
Viskosität
Einheit: $[\eta] = \frac{Ns}{m^2} = Pa \cdot s$

z.B. Wasser $\eta = 0.001025 Pa \cdot s$

Glycerin $\eta = 1.528 Pa \cdot s$

Luft (1 bar) $\eta = 0.0000174 Pa \cdot s$

- Laminares Strömungsprofil in Rohr



- Reibungskraft an axialem Flüssigkeitszylinder (Radius r , Länge L)

$$F_R = A \cdot \eta \cdot \frac{dv}{dr} = 2\pi r \cdot L \cdot \eta \cdot \frac{dv}{dr}$$

- Druckkraft auf Zylinderdeckel

$$F_p = \pi r^2 \cdot (p_1 - p_2)$$

- stationärer Zustand: $F_R = F_p$

$$\Rightarrow \dots \frac{dv}{dr} = \frac{p_1 - p_2}{2\eta L} \cdot r = \frac{\Delta p}{2\eta L} \cdot r$$

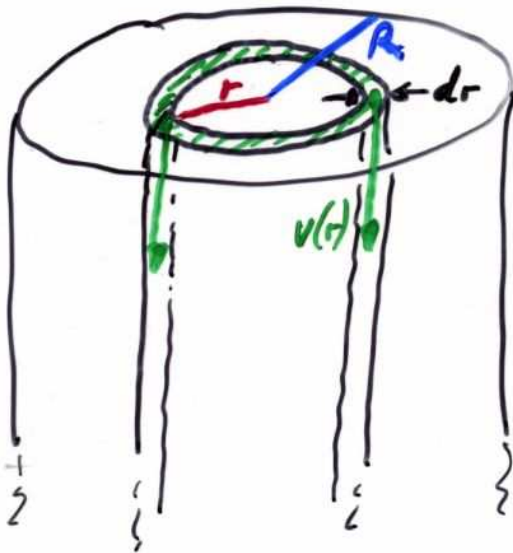
$$\int_0^r dr' \Rightarrow v(r) = v_0 - \frac{\Delta p}{4\eta L} r^2$$

parabolisches Geschwindigkeitsprofil

$$(v_0 := \frac{\Delta p}{4\eta L} \cdot R^2)$$

12.3 Strömungswiderstand

Betrachte laminares Strömungsprofil im Rohr



Volumenstromstärke dI
durch Hohlzylinder
zwischen r und $r+dr$

$$dI = d\dot{V} = 2\pi r \cdot dr \cdot v(r)$$
$$= 2\pi \cdot \left(v_0 - \frac{\Delta p}{4\eta L} \cdot r^2 \right) dr$$
$$\rightarrow I = \dot{V} = \int_0^R d\dot{V} = \int_0^R \dots dr$$

$$\rightarrow \boxed{I = \dot{V} = \frac{\pi \cdot \Delta p}{8\eta L} \cdot R^4}$$

Gesetz von Hagen-Poiseuille

NB: Stromstärke $\triangleright I \sim R^4$
 $\triangleright I \sim \frac{1}{\eta}$
 $\triangleright I \sim \Delta p$

$$\left[\begin{aligned} I &= \frac{1}{\rho} \int \vec{j} \cdot d\vec{A} \\ \vec{j} &= \rho \vec{v} \\ dA &= \underbrace{2\pi r}_{\text{Umfang Hohlzylinder}} \cdot \underbrace{dr}_{\text{Manteldicke Hohlzylinder}} \end{aligned} \right] \quad dI = v \cdot dA = 2\pi r \cdot dr \cdot v(r)$$

12.4 Navier-Stokes-Gleichung

$$\begin{aligned}\rho \frac{d\vec{u}}{dt} &= \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \eta (\vec{\nabla})^2 \vec{u} \\ &= \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u} \right) = -\text{grad } p + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{u}\end{aligned}$$

$\Delta := \vec{\nabla}^2$ Laplace-Operator

Lösung: schwierig analytisch zu finden!

→ Computersimulation ($\hat{=}$ numerische Lösung)

→ experimentelle Lösung (z.B. Windkanal)

↪ Ähnlichkeitsgesetze

- Geometrische Ähnlichkeit (Abmessungen, Oberfläche, Form)

- Hydrodynamische Ähnlichkeit

 - ▶ Dichte ρ , Viskosität η ,
mittlere Geschwindigkeit \bar{v}

- Kennzahlen (d: lineare Abmessung oder Durchmesser)

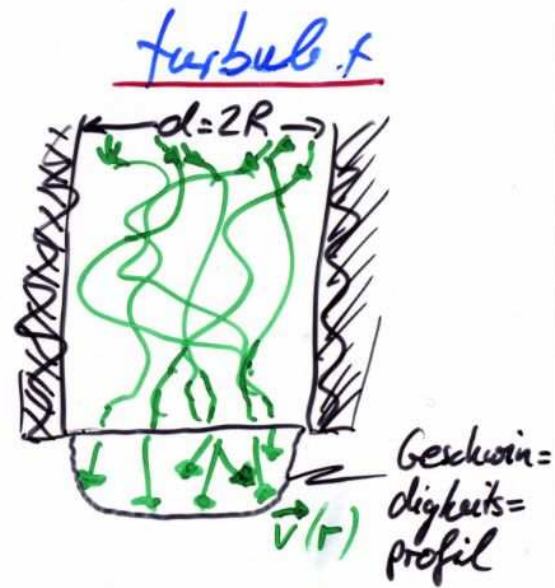
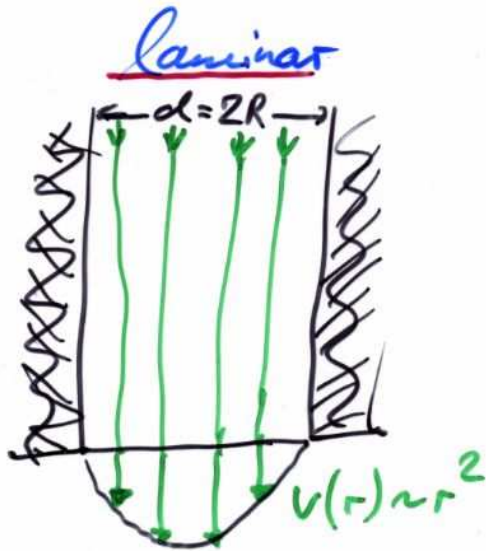
 - ▶ Reynoldszahl: $Re = \frac{d \cdot \rho \cdot \bar{v}}{\eta} \hat{=} \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}}$

 - ▶ Froude-Zahl: $Fr := \frac{\bar{v}}{\sqrt{d \cdot g}} \hat{=} \sqrt{\frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Schwerkraft}}}$

 - ▶ Mach-Zahl: $M := \frac{v}{v_{\text{Schall}}}$

→ Ähnlichkeit: z.B. Widerstandswerte c_w geometrisch ähnlicher Körper stimmen überein, wenn Reynoldszahlen gleich sind
NB: $Re = \text{const} \rightarrow \bar{v} \sim 1/d$

12.5 Turbulente Strömungen



Charakteristikum:

$$Re \leq Re_c$$

$$Re > Re_c$$

mit kritischer Reynoldszahl Re_c

z.B. ▶ rundes Rohr, Durchmesser $d = 2R$

$$Re_c = \frac{2R \cdot \rho \cdot \bar{v}_c}{\eta} \approx 2300$$

▶ rundes Rohr mit glattem Einlauf

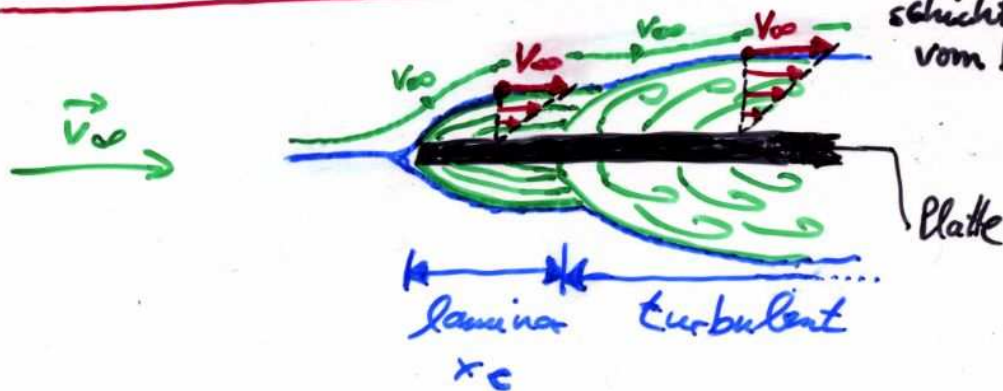
$$Re_c \approx 20000$$

▶ dito mit scharfkantigem Einlauf

$$Re_c = 1000 - 1200$$

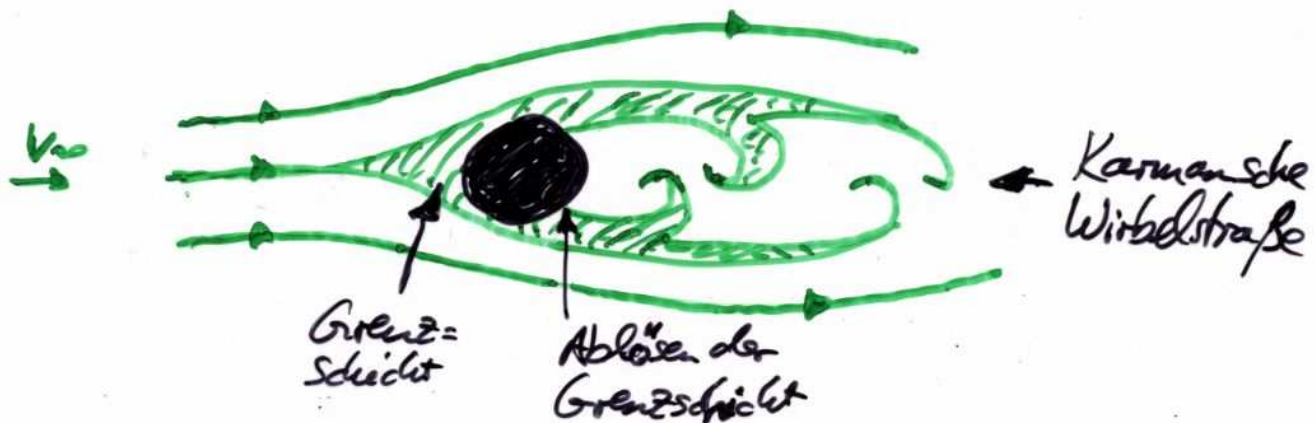
12.5.1 umströmte Körper

- Prandtl'sche Grenzschicht: In Prandtl'scher Grenzschicht nimmt v linear vom Körper bis zur Grenzgeschwindigkeit v_0 zu

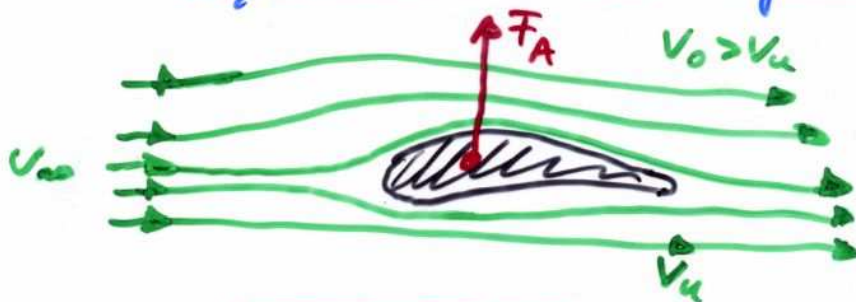


$$Re_c = \frac{\rho \cdot v \cdot x_c}{\eta} \approx 5 \cdot 10^5$$

- Abreißen der Prandtl'schen Grenzschicht für $Re > Re_c$



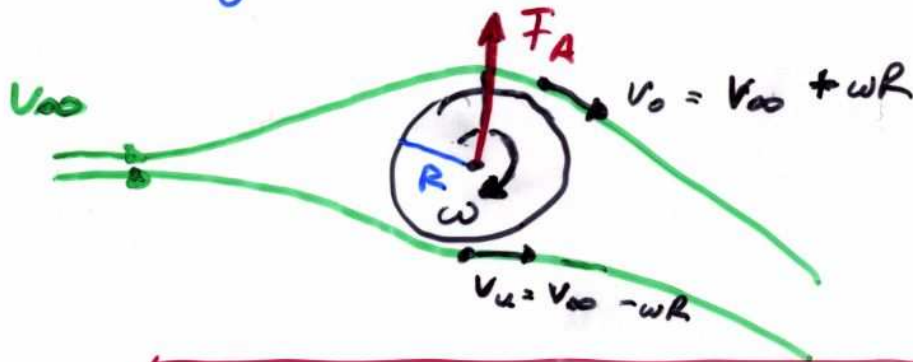
- dynamischer Auftrieb



$$F_A = \Delta p \cdot A = c_A \cdot \frac{\rho}{2} (v_0^2 - v_u^2)$$

Flügelfläche dynamischer Auftrieb (abhängig vom Profil)

• Magnus-Effekt



rotierender Zylinder
mit Länge L , Radius R

$$F_A = 2\omega \cdot v_\infty \cdot \rho \cdot (\pi R^2 L)$$

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{1}{2} \rho (v_o^2 - v_u^2) \quad \text{vgl. Bernoulli-Gleichung} \\ &\approx \frac{1}{2} \rho [(v_\infty + \omega R)^2 - (v_\infty - \omega R)^2] = \dots = 2\rho \omega R \cdot v_\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow F_A &= \Delta p \cdot A \xrightarrow{A = \frac{1}{2} \cdot (2\pi R \cdot L)} F_A = 2\rho \omega R \cdot v_\infty \cdot \pi R L = 2\omega v_\infty \rho \cdot \underbrace{\pi R^2 L}_{\text{Zylindersvolumen}} \end{aligned}$$

Zylinder =
Oberfläche