Kraft: $\vec{F} = m\vec{a}$

Einheit der Kraft: $1\,kg\,\frac{m}{s^2} =: 1\,N$, Newton

3.2 Impulserhaltung

- Ein Abgeschlossenes System erfährt keine Kräfte von außen und übt keine Kräfte nach außen aus

$\rightarrow \vec{F}_{geschl.Sys} = 0$

$\rightarrow \frac{d\vec{p}_{geschl.Sys.}}{dt} = 0 \rightarrow \boxed{\vec{p}_{geschl.Sys} = const.}$

Impulserhaltung

NB: Das abgeschlossene System kann aus N Körpern bestehen, die aufeinander Kräfte $\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i$ aus= üben

$\rightarrow 0 = \vec{F}_{geschl.Sys} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$

$\rightarrow \vec{p}_{geschl.Sys} = \boxed{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = const.}$

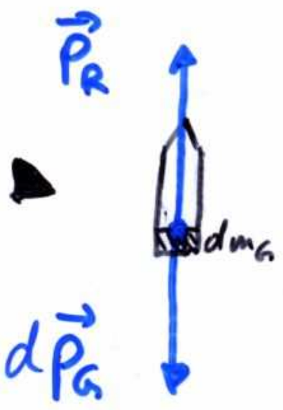
Impulserhaltungs= satz

z.B.: $N=2 \rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const$

$\rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(const) = 0$

$\rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

3.2.1 Beispiel zur Impulserhaltung: Raketenantrieb



$$\vec{p}_R + d\vec{p}_G = \text{const.} = m \cdot \vec{v}_R + dm_G \cdot \vec{v}_G$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{p}_R}{dt} + \frac{d\vec{p}_G}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}\left(m \cdot \vec{v}_R\right) + \frac{dm_G}{dt} \cdot \vec{v}_G$$

$$= \left(\dot{m}\vec{v}_R + m\dot{\vec{v}}_R\right) + \underbrace{\dot{m}_G}_{=-\dot{m}}\vec{v}_G$$

$$= \dot{m}\vec{v}_R + m\dot{\vec{v}}_R - \dot{m}\vec{v}_G$$

$$= m\dot{\vec{v}}_R + \dot{m}\left(\vec{v}_R - \vec{v}_G\right)$$

Ausströmgeschwindigkeit: $\vec{v}_r := \vec{v}_R - \vec{v}_G$ (Relativgeschwindigkeit)

$$\rightarrow \dot{\vec{v}}_r = \dot{\vec{v}}_R - \dot{\vec{v}}_G = 0$$

$$\longrightarrow \vec{F}_{ges} = 0 = m\dot{\vec{v}}_R + \dot{m}\vec{v}_r$$

- Füge Gravitionskraft auf Rakete hinzu:

$$\longrightarrow \vec{F}_G = -m\vec{g} = m\dot{\vec{v}}_R + \dot{m}\vec{v}_r$$

in 1 dim: $\quad -mg = m\dot{v}_R + \dot{m}v_r$

$$-mg = m\frac{dv_R}{dt} + \frac{dm}{dt}v_r \qquad \Big| \cdot \text{„}dt\text{“}$$

Separation der Veränderlichen $\Rightarrow -mg\,dt = m\,dv_R + dm \cdot v_r \quad \Big| \cdot \frac{1}{m}$

$$\rightarrow -g\,dt = dv_R + \frac{dm}{m} \cdot v_r$$

$$\rightarrow dv_R = -v_r \frac{dm}{m} - g\,dt$$

Integration von $t = 0$ bis zur Brenndauer T

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v_R(T)} dv_R = -\int_{m_0}^{m(T)} v_r \frac{dm}{m} - \int_0^T g\,dt$$

$$\rightarrow v_R \Big|_{v_0}^{v_R(T)} = -v_r \Big[\ln m\Big]_{m_0}^{m(T)} - gt\Big|_0^T$$

$$\rightarrow v_R(T) - v_0 = -v_r\Big[\ln m(T) - \ln m_0\Big] - gT$$

$$\rightarrow \boxed{v_R(T) = v_0 - v_r \ln\frac{m(T)}{m_0} - gT}$$

Raketengleichung

3.3 Beispiele für Kräfte

- Kräfte bei Kreisbewegungen

▸ Zentripetalkraft durch Zentripetalbeschleunigung

$$\vec{a}_Z = -\frac{v^2}{R^2}\cdot\vec{R} \rightarrow \boxed{\vec{F}_Z = m\,\vec{a}_Z = -m\frac{v^2}{R^2}\vec{R}}$$

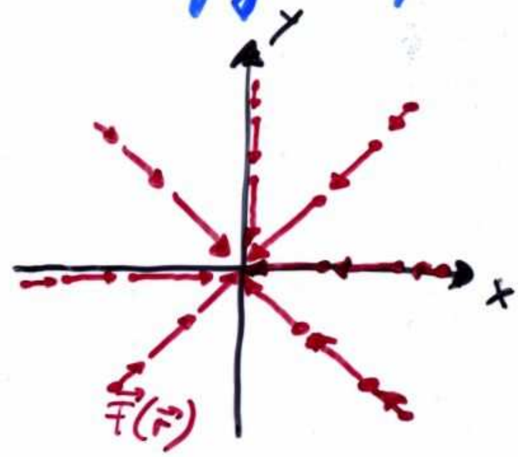
Zentripetalkraft

NB: $\vec{F}_Z = \vec{F}_Z(\vec{R})$ ist ortsabhängige Kraft

→ Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$

z.B. $\vec{F}(\vec{r}) \sim \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$;

mit $\vec{r} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$



→ Zentralkraftfeld

NB: 3. Newton. Axiom: $\vec{F}_{Zentripetal} = -\vec{F}_{Zentrifugal}$

Zentrifugalkraft

▸ Beschleunigung/Verzögerung der Kreisbewegung

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{R} \rightarrow \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{R})$$

$$= \dot{\vec{\omega}}\times\vec{R} + \vec{\omega}\times\dot{\vec{R}}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\cdot(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{R} + \vec{\omega}\times\dot{\vec{R}})$$

Betrachte: $\vec{R} \times \vec{F} = \vec{R} \times m\vec{a} = m \cdot \vec{R} \times \left(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{R}}\right)$

$$= \dots = mR^2 \cdot \dot{\vec{\omega}}$$

$\rightarrow$ $\boxed{\vec{M} := \vec{R} \times \vec{F} = mR^2 \cdot \dot{\vec{\omega}}}$ Drehmoment

$$\vec{R} \times \vec{F} = \vec{M} \parallel \vec{\omega}$$

$$\vec{M} \perp \vec{R}, \vec{F}$$

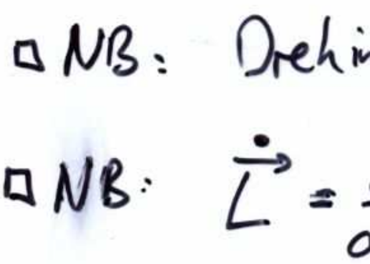
- Impuls der Kreisbewegung:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{\omega} \times \vec{R}$$

Betrachte: $\vec{R} \times \vec{p} = m\vec{R} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{R}\right) = \dots = mR^2\vec{\omega}$

$\boxed{\vec{L} := \vec{R} \times \vec{p} = mR^2 \cdot \vec{\omega}}$ Drehimpuls



□ NB: Drehimpulserhaltung in abgeschlossenen Systemen

□ NB: $\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{R} \times \vec{p}\right) = \underbrace{\dot{\vec{R}} \times \vec{p}}_{=0,\ \text{da}\ \dot{\vec{R}} = \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m}} + \vec{R} \times \underbrace{\dot{\vec{p}}}_{\vec{F}}$

$\rightarrow$ $\boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{R} \times \vec{F} = \vec{M}}$