- kinetische Energie

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad ; \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \longrightarrow d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$

$$\longrightarrow W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int \left(m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\right)\cdot\left(\vec{v}\,dt\right) = m\int \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt$$

$$= m\int \vec{v}\,d\vec{v}$$

$$\longrightarrow W = m\frac{(\vec{v})^2}{2}\Bigg|_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} = \frac{1}{2}m(\vec{v}_2)^2 - \frac{1}{2}m(\vec{v}_1)^2$$

$$=: E_{kin,2} - E_{kin,1} = \Delta E_{kin}$$

$$\boxed{E_{kin} := \frac{1}{2}mv^2}$$ kinetische Energie

- Rotationsenergie für Massenpunkt

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{R} \\ \vec{\omega}\perp\vec{R} \rightarrow v = \omega\cdot R \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{E_{rot} = \frac{1}{2}m(\omega\cdot R)^2 = \frac{1}{2}mR^2\cdot\omega^2}$$

Rotationsenergie

- Potentielle Energie in konservativen Kraftfeldern

$$W = \int_{P_1}^{P_2}\vec{F}\,d\vec{r} =: E_{pot}(P_1) - E_{pot}(P_2) = -\Delta E_{pot}$$

potentielle Energie

- Vorzeichenkonvention: neg. (pos.) Arbeit bei Bewegung gegen (mit) $\vec{F}$

Vorzeichenkonvention bedeutet

neg. Arbeit $\rightarrow$ Erhöhung von E_{pot}
$\hat{=}$ Energiezufuhr

pos. Arbeit $\rightarrow$ Reduktion von E_{pot}
$\hat{=}$ Körper / Maschine leistet Arbeit

z.B. $\vec{F} = -m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$

$d\vec{r} = \vec{e}_z\, dr$

$$\rightarrow W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{z_1}^{z_2} (-mg\vec{e}_z)\cdot(\vec{e}_z\, dr) = \int_{z_1}^{z_2} -mg\, dr$$

$$\rightarrow W = -mgz_2 - (-mgz_1)$$

$$= mgz_1 - mgz_2 \overset{!}{=} E_{pot}(z_1) - E_{pot}(z_2)$$

$$\rightarrow \boxed{E_{pot}(z) = mgz}$$

- <u>Energieerhaltung</u>

$$\boxed{E_{kin} + E_{pot} + \dots = const}$$ in konservativen Kraftfeldern

NB: in dissipativen Feldern müssen weitere Energien berücksichtigt werden (z.B. Wärmeenergie)

Im abgeschlossenen Systemen bleibt Gesamtenergie konstant

- potentieller Energie und Kraftfeld

$$W = \int \vec{F} d\vec{r} = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz = -\Delta E_{pot}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\int F_x dx\right)}_{= F_x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\int F_y dy\right)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\int F_z dz\right)}_{=0}$$

analog $\frac{\partial W}{\partial y} = F_y$; $\frac{\partial W}{\partial z} = F_z$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\underbrace{\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}}_{\text{Nabla-Operator}} E_{pot}} = \boxed{- \vec{\nabla} E_{pot} = -\text{grad} E_{pot}}$$

Nabla-Operator Gradient

Skalarfeld $E_{pot}(\vec{r})$ beschreibt Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$

Gravitationspotential:

$$\vec{F} = -G_N \frac{m \cdot M}{r^2} \vec{e_r}$$

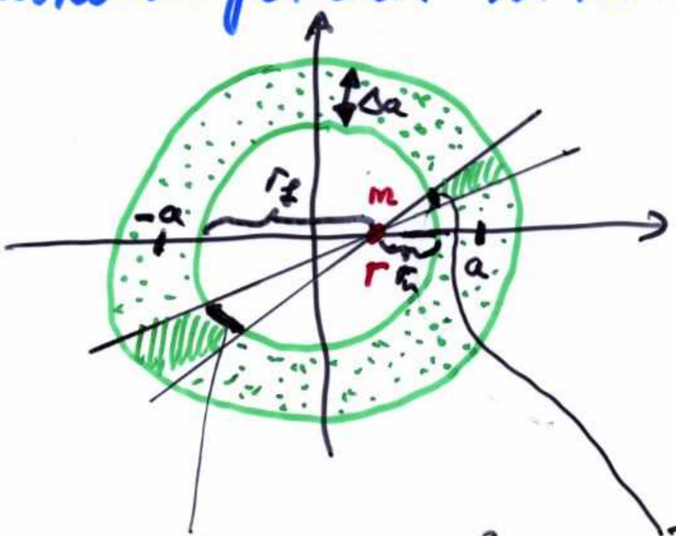
$$\rightarrow W = \int \vec{F} d\vec{r} = -\int_R^\infty G_N \frac{m \cdot M}{r^2} \vec{e_r} d\vec{r} = -\int_R^\infty G_N \frac{m \cdot M}{r^2} dr$$

$$= +G_N \frac{m M}{r}\Big|_R^\infty = -G_N \frac{m M}{R} = E_{pot}(R) - \underbrace{E_{pot}(\infty)}_{:= 0}$$

$\rightarrow E_{pot}(R) = -G_N \frac{m M}{R}$ potentielle Energie des Gravitationsfeldes

$\rightarrow \boxed{\Phi(R) := -G_N \frac{M}{R}}$ Gravitationspotential ($\vec{g} = -\text{grad}(\Phi)$)

▸ Gravitationspotential in Hohlkugel



$$r_f = a + r - \frac{\Delta a}{2}$$

$$r_n = a - r - \frac{\Delta a}{2}$$

Fläche $\Delta A_f \sim r_f^2$ Fläche $\Delta A_n \sim r_n^2$

Masse ~ Volumen → $\Delta M_f \sim \Delta A_f \cdot \Delta a$; $\Delta M_n \sim r_n^2 \cdot \Delta a$

$\sim r_f^2 \cdot \Delta a$

pot. Energie ~ $\frac{\text{Masse}}{\text{Abstand}}$ → $E_{pot,f} \sim G_N m \frac{\Delta M_f}{r_f}$; $E_{pot,n} \sim G_N \cdot m \frac{\Delta M_n}{r_n}$

Gesamte pot. Energie → $\Delta E_{pot} = E_{pot,f} + E_{pot,n}$

$$\sim G_N \cdot m \left(\frac{\Delta M_f}{r_f} + \frac{\Delta M_n}{r_n} \right)$$

$$\sim G_N \cdot m \left(\frac{r_f^2 \cdot \Delta a}{r_f} + \frac{r_n^2 \cdot \Delta a}{r_n} \right)$$

$$\rightarrow \Delta E_{pot} \sim G_N \cdot m \underbrace{\left(r_f + r_n \right)}_{2a - \Delta a} \cdot \Delta a$$

$$\rightarrow \Delta E_{pot} \sim G_N \cdot m \, (2a - \Delta a) \cdot \Delta a = \text{const}\,!$$

vollständige Rechnung ⇒ $\boxed{E_{pot} = -G_N \frac{m M}{a} = \text{const}}$ → $\boxed{\vec{F} = -\text{grad}\, E_{pot} = 0}$!