

1. Einführung & Einleitung

- Physik: In beobachtbaren Naturvorgängen

Gesetzmäßigkeiten / Zusammenhänge
erkennen

und durch wenige Grundprinzipien erklären

- Konzept der Physik:



- Makroskopische Phänomene



Mikroskopische Phänomene

- Beschreibung der Natur erfordert

Naturkonstanten

z.B.:

Feinstruktur-
konstante

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c \epsilon_0} \approx \frac{1}{137}$$

Elementarladung e : $C = As$

Lichtgeschwindigkeit c : m/s

Vakuum Dielektrizitäts-
konst. ϵ_0 : $\frac{As}{Vm} = \frac{C^2}{Jm}$

Planck Wirkungsquantum \hbar : $J \cdot s$

α ist ein Zahl ohne Einheit

"Natürliche" Wahl der dimensionsbehafteten Größen:

$$c = 1$$

$$\hbar = 1$$

$$\epsilon_0 = 1$$

$$\rightarrow e = \sqrt{4\pi\alpha}$$

$$\frac{1}{\alpha} = 137.036$$

$$= 111.123456789$$

↑
Ist "Numerologie", da kein Modell/keine
Theorie damit verbunden ist, also auch
keine Vorhersagekraft

1.1 Basiseinheiten, Basisgrößen

(SI-System, m.k.s-System)

| <u>Größe</u> | <u>übl. Symbol</u> | <u>Name</u> | <u>Abk.</u> |
|---|--------------------|-------------|-------------|
| Länge | l | Meter | m |
| $1 \text{ m} \hat{=} \text{Lichtstrecke in } \frac{1}{299792458,0 \text{ s}}$ | | | |
| $c = 299792458,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ | | | |
| Zeit | t | Sekunde | s |
| Masse: | m | Kilogramm | kg |
| ----- | | | |
| Stoffmenge | n | Mol | mol |
| Temperatur | T | Kelvin | K |
| elektr. Stromstärke | I | Ampère | A |
| Lichtstärke | I | Candela | cd |
| (Raum-)Winkel | Ω | Steradian | sr |

1.2 Dezimalvorsätze

| Vorsatz | Wert | Abk. | Vorsatz | Wert | Abk. |
|---------|-------------------|-------|---------|------------------|------|
| Centi | $10^{-2} = 0.01$ | c | Hekto | $10^{+2} = 100$ | h |
| Milli | $10^{-3} = 0.001$ | m | Kilo | $10^{+3} = 1000$ | k |
| Mikro | $10^{-6} = \dots$ | μ | Mega | 10^{+6} | M |
| Nano | 10^{-9} | n | Giga | 10^{+9} | G |
| Pico | 10^{-12} | p | Tera | 10^{+12} | T |
| Femto | 10^{-15} | f | Peta | 10^{+15} | P |
| Atto | 10^{-18} | a | Exa | 10^{+18} | E |
| : | | | : | | |

Beachte: Doppelte Dezimalvorsätze sind unzulässig

1.3 Messung und Messunsicherheit

- $\text{Physikal. Messgröße} = (\text{Messzahl} \pm \text{Unsicherheit}) \cdot \text{Einheit}$
- keine Messung ohne Unsicherheit

• Messfehler

- ▶ quantifizieren Unsicherheit einer Messung
- ▶ erlauben Interpretation einer Messung

• Arten von Messfehler

▶ systematische Fehler

- Eichung der Messapparatur
- Durchführung des Messvorgangs
- Abänderung / Verbesserung des Messaufbaus
- können zu systematisch falschen Messwerten führen

▶ statistische Fehler

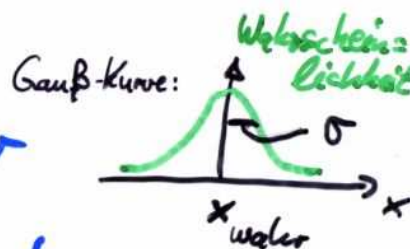
- Ablesungenauigkeiten
- unkontrollierbare Störungen
- Zufälligkeit des untersuchten Prozesses
- reduzierbar durch mehrfache Wiederholung der Messung

1.3.1 (Ein wenig) Statistik

- (arithmetische) Mittelwert

$$\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_{\text{wahr}}$$

- Einzelwerte streuen um x_{wahr}



wenn x_{wahr} durch \bar{x} approximiert wird,

dann

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}$$

Standardabweichung der Einzelmessung

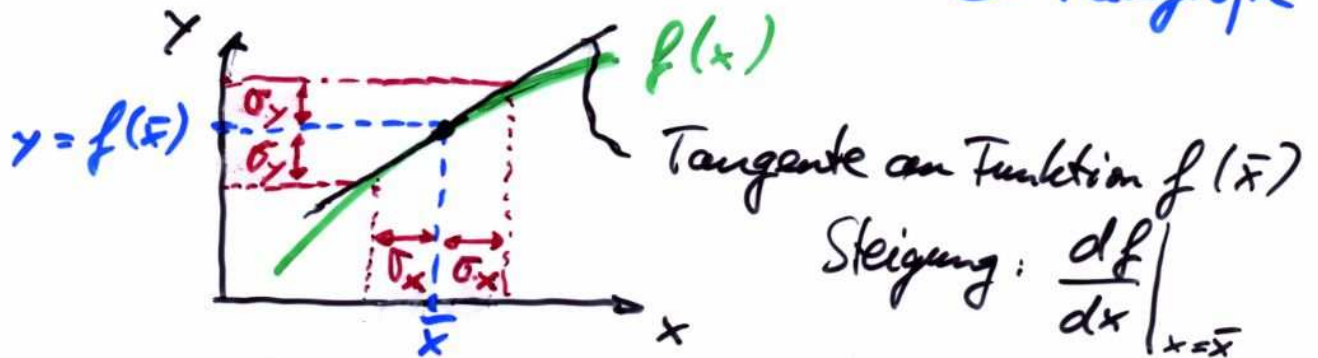
$$\sigma_m := \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

mittlere statistische Fehler des arithmetische Mittelwertes

(Standardabweichung des Mittelwertes)

1.3.2 Fehlerfortpflanzung

- zu bestimmende Größe $y = f(x)$ Messgröße



Fehler auf berechnete Größe $\sigma_y = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}} \cdot \sigma_x$ z.B. Fehler des Mittelwertes der Messgröße x



$$\sigma_y = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}} \cdot \sigma_x$$

- allg.: $y = f(x_1, \dots, x_N)$

N verschiedene Messgrößen

Gaußsche Fehlerfortpflanzungsformel

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma_{x_i}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_N} \right)^2 \sigma_{x_N}^2}$$

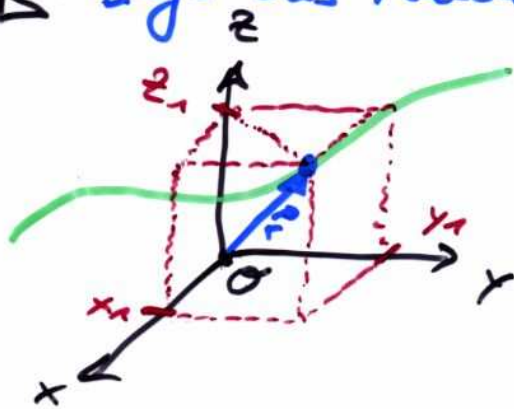
2. Kinematik eines Massenpunktes

Kinematik untersucht Ablauf der Bewegung

Bewegungen: Translation, Rotation

• Beschreibung der Bewegung

▷ Lage des Massenpunktes in kartesischen Koordinaten



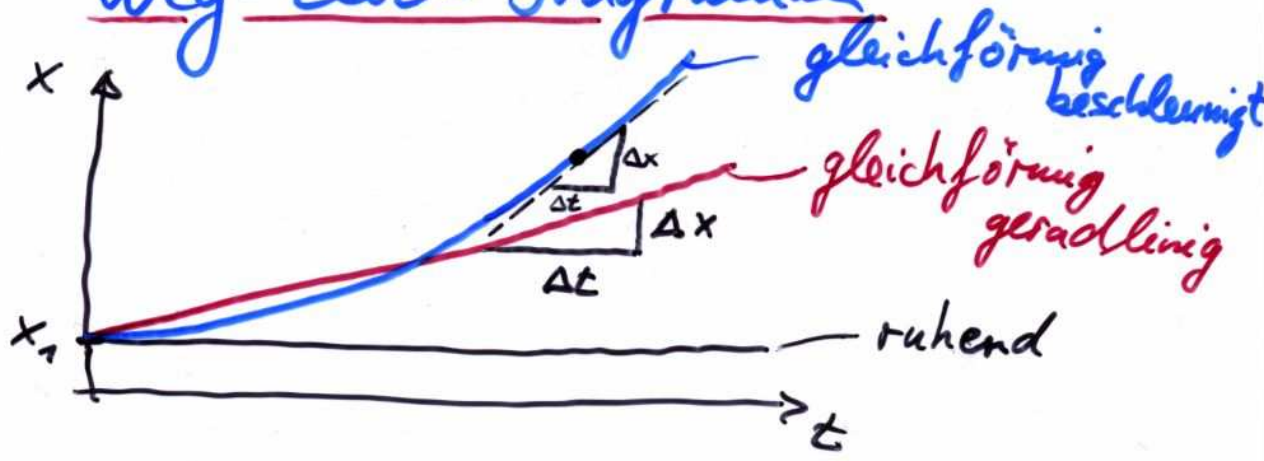
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

andere Koordinatensysteme:

- Kugelkoordinaten (R, φ, θ)
- Zylinder - " - (R, φ, z)

Weg-Zeit-Diagramm



• Geschwindigkeit : $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Durchschnittsgeschwindigkeit $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
(Momentan-) Geschwindigkeit $v := \frac{dx}{dt} =: \dot{x}$

• Beschleunigung : $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

(Momentan-) Beschleunigung : $a := \frac{dv}{dt} =: \dot{v}$
 $\Rightarrow a = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2} =: \ddot{x}$

• Bewegungsgesetze (1-dim)
gleichförmig beschleunigte Bewegung

$$a(t) = a = \text{const}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \rightarrow v(t) = \int a(t') dt' = \int a dt' = a \cdot t + \text{const}'$$

$$v(t) = a \cdot t + v_0$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow x(t) = \int v(t') dt' = \int (a \cdot t' + v_0) dt' \\ = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + \text{const}''$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

Die Werte a , v_0 , x_0 sind Startwerte;

z.B. gleichförmige Bewegung: $a = 0$

$$x(t) = v_0 t + x_0$$

$$v(t) = v_0$$

$$a(t) = 0$$

• Bewegung in Ebene / Raum

▶ Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung
sind Vektoren

$$\vec{r}(t), \vec{v}(t), \vec{a}(t)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \dot{\vec{r}}(t)$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

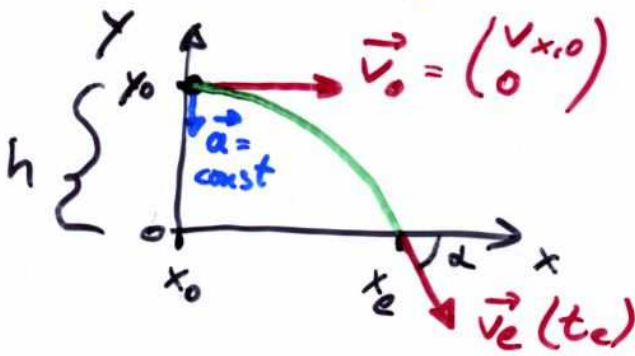
Superpositionsprinzip

Gleichzeitig verlaufende Bewegungen
überlagern sich ungestört und
addieren sich geometrisch



$$\vec{v}_{\text{Gesamt}} = \vec{v}_{\text{Fluss}} + \vec{v}_{\text{Boot}}$$

Anwendungsbeispiel: waagrecht Wurf



$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \vec{a} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

Startwerte: $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$, $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot t^2 + v_{x,0} \cdot t + 0 \\ -\frac{1}{2} g t^2 + 0 \cdot t + h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x,0} \cdot t \\ -\frac{1}{2} g t^2 + h \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} x_e \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Auftreffpunkt}$$

$$\Rightarrow v_{x,0} \cdot t_e \stackrel{!}{=} x_e \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2} g t_e^2 + h \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow t_e^2 = \frac{2h}{g} \rightarrow \boxed{t_e = \sqrt{\frac{2h}{g}}} \quad \text{Flugzeit}$$

$$\rightarrow \boxed{x_e = v_{x,0} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}} \quad \text{Wurfweite}$$

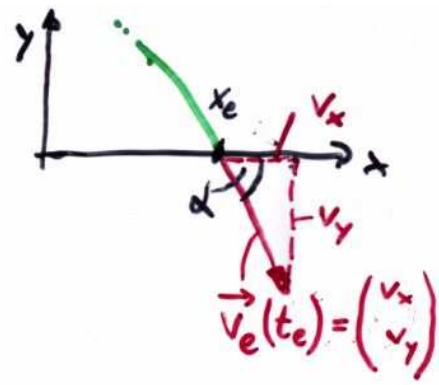
$$\vec{v}_e(t_e) = \vec{a} \cdot t_e + \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot t_e + \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{v}_e(t_e) = \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ -\sqrt{2gh} \end{pmatrix}} \quad \text{Auftreffgeschwindigkeit}$$

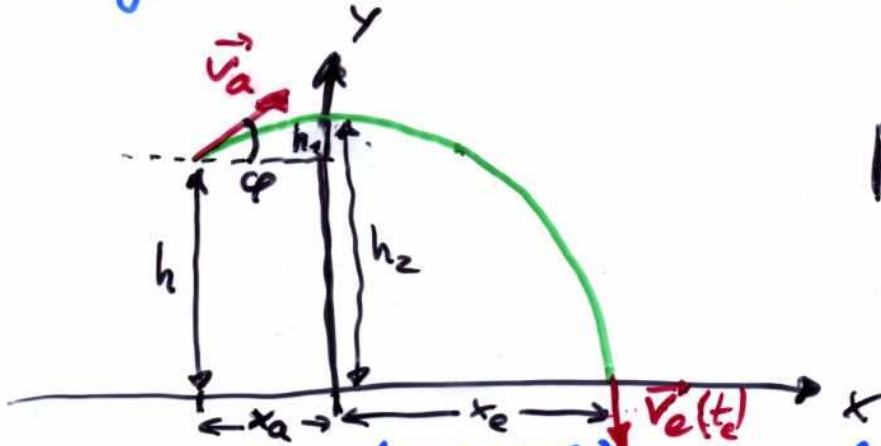
$$\rightarrow |\vec{v}_e(t_e)| = \sqrt{v_{x,0}^2 + 2gh} \quad \text{Absolutbetrag der Auftreffgeschwindigkeit}$$

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-\sqrt{2gh}}{v_{x,0}}$$

Auftreffwinkel α



► "2x" waagerechte Wurf → schräger Wurf



$$|\vec{v}_a| =: v_0$$

$$\vec{v}_a(t=0) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos \varphi \\ v_0 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ +\sqrt{2gh_1} \end{pmatrix} \leftarrow \textcircled{*}$$

$$\vec{v}_e(t=t_e) = \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ -\sqrt{2gh_2} \end{pmatrix}$$

$$x_a = v_{x,0} \cdot \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \quad ; \quad x_e = v_{x,0} \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$$

$$\rightarrow x_w = x_a + x_e = v_{x,0} \cdot \left(\sqrt{\frac{2h_1}{g}} + \sqrt{\frac{2h_2}{g}} \right)$$

aus $\textcircled{*} \rightarrow v_0 \cdot \sin \varphi = \sqrt{2gh_1} \rightarrow h_1 = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi}{2g}$

$h_2 = h + h_1 \rightarrow h_2 = h + \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi}{2g}$

$$\rightarrow x_w = v_0 \cos \varphi \cdot \left(\frac{v_0 \sin \varphi}{g} + \sqrt{\frac{2gh}{g^2} + \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{g^2}} \right)$$

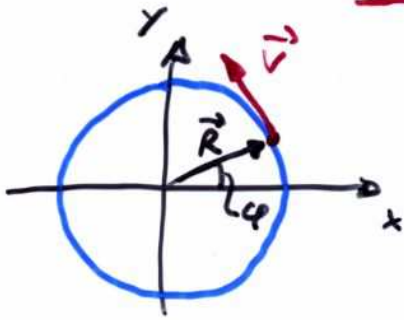
Wurfweite

$$x_w = \frac{v_0^2 \cos\varphi \cdot \sin\varphi}{g} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2\varphi}} \right)$$

$$\cos\varphi \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi$$

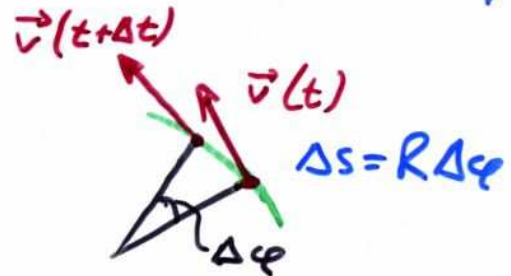
NB: Symmetrien in einer Bewegung können zu einer einfachen Lösung der Bewegungsgleichungen führen

Kreisbewegungen



Winkel φ ; üblicherweise in radian (rad)
 $(360^\circ \hat{=} 2\pi \text{ rad}, 1^\circ \hat{=} 0.01745 \text{ rad})$

- Winkelgeschwindigkeit ω



$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta(R\varphi)}{\Delta t} \rightarrow \frac{d(R\varphi)}{dt} = \underbrace{\frac{dR}{dt}}_{=0} \cdot \varphi + R \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\rightarrow v = R \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\boxed{\omega := \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{R} = \dot{\varphi}}$$

- Umlauffrequenz: $f := \frac{\omega}{2\pi} \quad \left[\frac{1}{s} \right] \hat{=} [Hz]$

- Umlaufzeit, Periode: $T := \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$

- Vektordarstellung der Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

$$\vec{v} \perp \vec{\omega}, \vec{R}$$

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{R}| \cdot \sin \alpha(\vec{\omega}, \vec{R})$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{R^2} (\vec{R} \times \vec{v})$$

$$\text{folgt aus } \vec{R} \times \vec{v} = \vec{R} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

"bac-cab"-Regel: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

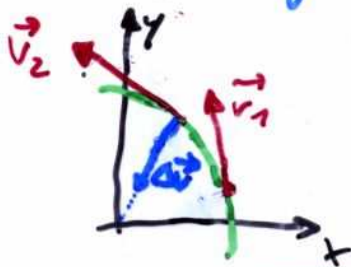
Skalarprodukt:
 $\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \alpha(\vec{a}, \vec{c})$

$\vec{\omega} \perp \vec{v}, \vec{R}$, d.h. senkrecht auf Ebene der Kreisbewegung

Richtung von $\vec{\omega}$: Rechte-Hand-Regel



- Kreisbewegungen mit konstantem $\vec{\omega}$ sind gleichförmig beschleunigt



$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$$

$$\Delta \vec{v} \parallel \vec{R} \text{ (antiparallel)}$$

$$\vec{a}_z = -\omega^2 \vec{R} = -\frac{v^2}{R^2} \cdot \vec{R}$$

Zentripetal-
beschleunigung

$$\vec{a}_{\text{Gesamt}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{e}_\varphi)$$

$$= \underbrace{\frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_\varphi}_{\rightarrow \text{Winkelbeschleunigung (hier = 0)}} + v \underbrace{\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}}_{=: \vec{a}_z}$$

$$|\vec{e}_\varphi| = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = 1 \rightarrow 0 = \frac{d(\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi)}{dt} = 2\vec{e}_\varphi \cdot \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \vec{e}_\varphi \perp \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$$

$$\text{und } \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \parallel \vec{e}_r \text{ (parallel)}$$

\vec{e}_φ rotiert mit $\omega \rightarrow \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$ rotiert mit ω

$$\left(\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\omega \vec{e}_r \rightarrow \vec{a} = v \cdot \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = (\omega \cdot R) \cdot (-\omega \vec{e}_r) = -\omega^2 \cdot R \vec{e}_r = -\omega^2 \vec{R}$$

3 Newtonsche Mechanik

Dynamik: untersucht Gründe einer Bewegungsänderung

- Ursachen: Kräfte
 - ▶ Kräfte sind Vektoren
 - ▶ Superpositionsprinzip für Kräfte (Vektoraddition)

3.1 Newtonsche Axiome

- 1. Newtonsches Axiom: Trägheitsprinzip

Maß für Bewegungszustand: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ Impuls

1. Newton. Axiom: $\vec{p} = \text{const}$

- 2. Newtonsches Axiom: Aktionsprinzip

$$\vec{F} := \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \underbrace{m}_{m \cdot \vec{a}} \dot{\vec{v}} + \underbrace{\dot{m} \cdot \vec{v}}_{\text{Raketeantrieb}}$$

$m = \text{const}$
→

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

- 3. Newtonsche Axiom: Reaktionsprinzip

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \text{actio} = \text{reactio}$$

$$\text{Kraft: } \vec{F} = m\vec{a}$$

Einheit der Kraft: $1 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} =: 1 \text{ N}$, Newton

3.2 Impulserhaltung

- Ein Abgeschlossenes System erfährt keine Kräfte von außen und übt keine Kräfte nach außen aus

$$\rightarrow \vec{F}_{\text{geschl. Sys}} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{P}_{\text{geschl. Sys.}}}{dt} = 0 \rightarrow$$

$$\vec{P}_{\text{geschl. Sys}} = \text{const.}$$

Impulserhaltung

NB: Das abgeschlossene System kann aus N Körpern bestehen, die untereinander Kräfte $\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i$ ausüben

$$\rightarrow 0 = \vec{F}_{\text{geschl. Sys}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0$$

$$\rightarrow \vec{P}_{\text{geschl. Sys}} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \text{const.}$$

Impulserhaltungssatz

z.B.: $N=2 \rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}$

$$\rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\text{const}) = 0$$

$$\rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

3.2.1 Beispiel zur Impulserhaltung:

Raketenantrieb



$$\vec{p}_R + d\vec{p}_G = \text{const.} = m \cdot \vec{v}_R + dm_G \cdot \vec{v}_G$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{p}_R}{dt} + \frac{d\vec{p}_G}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}_R) + \frac{dm_G}{dt} \cdot \vec{v}_G$$

$$= (\dot{m} \vec{v}_R + m \dot{\vec{v}}_R) + \dot{m}_G \vec{v}_G$$

$$= -\dot{m}$$

$$= \dot{m} \vec{v}_R + m \dot{\vec{v}}_R - \dot{m} \vec{v}_G$$

$$= m \dot{\vec{v}}_R + \dot{m} (\vec{v}_R - \vec{v}_G)$$

Ausströmungsgeschwindigkeit: $\vec{v}_r := \vec{v}_R - \vec{v}_G$ (Relativgeschwindigkeit)

$$\rightarrow \dot{\vec{v}}_r = \dot{\vec{v}}_R - \dot{\vec{v}}_G = 0$$

$$\rightarrow \vec{F}_{\text{ges}} = 0 = m \dot{\vec{v}}_R + \dot{m} \vec{v}_r$$

► Füge Gravitationskraft auf Rakete hinzu:

$$\rightarrow \vec{F}_G = -m\vec{g} = m \dot{\vec{v}}_R + \dot{m} \vec{v}_r$$

in 1dim: $-mg = m \dot{v}_R + \dot{m} v_r$

$$-mg = m \frac{dv_R}{dt} + \frac{dm}{dt} v_r$$

| "dt"

Separation der Veränderlichen $\Rightarrow -mg \, dt = m \, dv_R + dm \cdot v_r \cdot \frac{1}{m}$

$\rightarrow -g \, dt = dv_R + \frac{dm}{m} \cdot v_r$

$\rightarrow dv_R = -v_r \frac{dm}{m} - g \, dt$

Integration
von $t=0$ bis
zur Brenndauer T

$\Rightarrow \int_{v_0}^{v_R(T)} dv_R = - \int_{m_0}^{m(T)} v_r \frac{dm}{m} - \int_0^T g \, dt$

$\rightarrow v_R \Big|_{v_0}^{v_R(T)} = -v_r \left[\ln m \right]_{m_0}^{m(T)} - g t \Big|_0^T$

$\rightarrow v_R(T) - v_0 = -v_r \left[\ln m(T) - \ln m_0 \right] - gT$

$\rightarrow v_R(T) = v_0 - v_r \ln \frac{m(T)}{m_0} - gT$

Raketengleichung

3.3 Beispiele für Kräfte

- Kräfte bei Kreisbewegungen

- ▶ Zentripetalkraft durch Zentripetalbeschleunigung

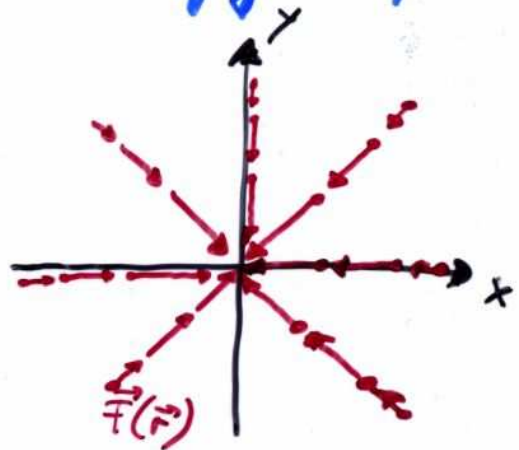
$$\vec{a}_Z = -\frac{v^2}{R^2} \cdot \vec{R} \rightarrow \boxed{\vec{F}_Z = m \vec{a}_Z = -m \frac{v^2}{R^2} \vec{R}}$$

Zentripetalkraft

NB: $\vec{F}_Z = \vec{F}_Z(\vec{R})$ ist ortsabhängige Kraft

→ Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$

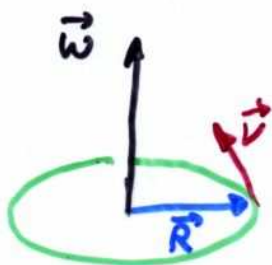
z.B. $\vec{F}(\vec{r}) \sim \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$
mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



→ Zentralkraftfeld

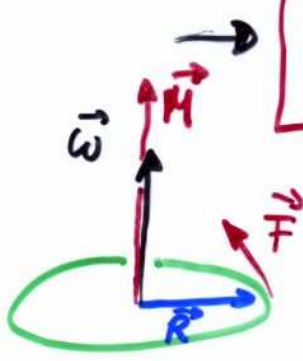
NB: 3. Newton. Axiom: $\vec{F}_{\text{Zentripetal}} = -\vec{F}_{\text{Zentrifugal}}$
Zentrifugalkraft

- ▶ Beschleunigung / Verzögerung der Kreisbewegung



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \rightarrow \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{R})$$
$$= \dot{\vec{\omega}} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{R}}$$
$$\vec{F} = m \vec{a} = m \cdot (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{R}})$$

Betrachte: $\vec{R} \times \vec{F} = \vec{R} \times m\vec{a} = m \cdot \vec{R} \times (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{R}})$
 $= \dots = m R^2 \cdot \dot{\vec{\omega}}$



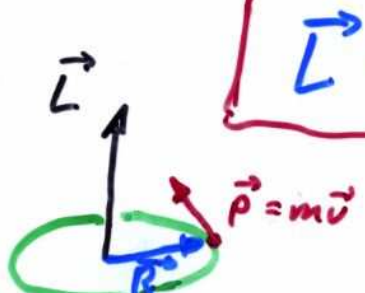
$\vec{M} := \vec{R} \times \vec{F} = m R^2 \cdot \dot{\vec{\omega}}$ Drehmoment

$\vec{R} \times \vec{F} = \vec{M} \parallel \dot{\vec{\omega}}$
 $\vec{M} \perp \vec{R}, \vec{F}$

► Impuls der Kreisbewegung:

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$
 $\vec{p} = m \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{\omega} \times \vec{R}$

Betrachte: $\vec{R} \times \vec{p} = m \vec{R} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) = \dots = m R^2 \vec{\omega}$



$\vec{L} := \vec{R} \times \vec{p} = m R^2 \cdot \vec{\omega}$ Drehimpuls

□ NB: Drehimpulserhaltung in abgeschlossenen Systemen

□ NB: $\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{R} \times \vec{p}) = \underbrace{\dot{\vec{R}} \times \vec{p}}_{=0, da \vec{R} = \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m}} + \vec{R} \times \underbrace{\dot{\vec{p}}}_{\vec{F}}$

$\rightarrow \vec{L} = \vec{R} \times \vec{F} = \vec{M}$

□ NB: Zentralkräfte mit $\vec{F} \sim \vec{R}$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{R} \times \dot{\vec{p}} = \vec{R} \times \underbrace{\vec{F}}_{\vec{F} \parallel \vec{R}} \sim \vec{R} \times \vec{R} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\dot{\vec{L}} = 0}$$

ändern Drehimpuls nicht!

• Federkräfte:

Hookesches Gesetz:

$$\boxed{\vec{F}_r = -D \vec{x}}$$

D: Richtgröße
Federkonstante
[N/m]

→ Anwendung als Kraftmesser

• Reibungskräfte:

Haft-, Gleit-, Roll-, Luft-, ... - Reibung

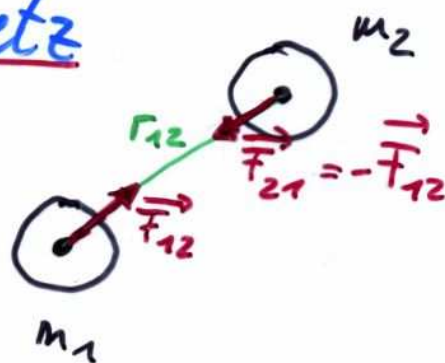
• Gravitationskraft

▶ Newtonsches Gravitationsgesetz

$$\boxed{F_G = G_N \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}}$$

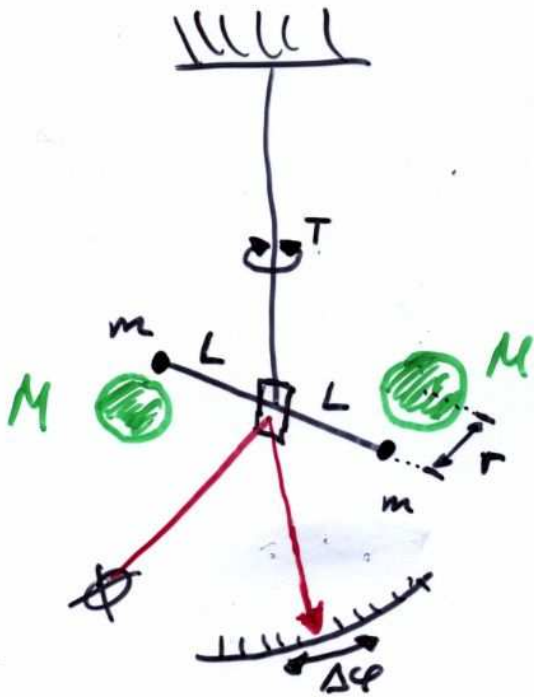
$$G_N = 6.6742 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

(CODATA)



Bestimmung der Gravitationskonst. G_N

Torsionspendel: (Cavendish, Eötvös)



$$F_G = G_N \cdot \frac{mM}{r^2}$$

Drehmoment M_D

$$M_D = 2L \cdot F_G = D^* \cdot \Delta\varphi/2$$

D^* : Winkelrichtgröße

$$D^* = \frac{4\pi^2 \cdot m \left(L^2 + \frac{2}{5} R_m^2 \right)}{T^2}$$

$$G_N = \frac{D^* \cdot \Delta\varphi/2 \cdot r^2}{2L \cdot mM}$$

$$\approx \frac{\pi^2 L \cdot \Delta\varphi \cdot r^2}{T^2 \cdot M} \quad (R_m \ll L)$$

$L = 50 \text{ mm}$

$m = 38.3 \text{ g}$

$M = 1.5 \text{ kg}$

$R_m = 9.5 \text{ mm}$ (Radius der Kugeln m)

$T = 496 \text{ s}$ (Schwingungsdauer)

Messung: $\Delta\varphi = \frac{8.34 \text{ mm}}{400 \text{ mm}} \approx 0.0209 \text{ rad} \rightarrow$

$G_N \approx 6.029 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \text{ kg}}$

$r = 46.5 \text{ mm}$

$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \rightarrow \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2} = \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \text{ kg}}$

- ▶ Erde: Gravitationskraft ist ortsabhängige Zentralkraft

$$\vec{F}_G = -G_N \frac{m \cdot M_E}{r^2} \vec{e}_r$$

NB: Kann Masse als in einem Punkt konzentriert betrachten
 → Punktmasse

3.3.1 Bewegungsgleichungen mit Kräften

- ortsunabhängige Kräfte: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$

2. Newtonsches Axiom → $\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \dot{\vec{v}}$

→ $\vec{v}(t) = \frac{1}{m} \int \vec{F} dt + \vec{v}_0$

→ $\vec{r}(t) = \int \vec{v} dt + \vec{r}_0 = \dots$
Kraftstoß

- ortsabhängige Kräfte: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$

z.B. Gravitationskraftfeld

▶ radiale Bewegung: $\vec{a}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_G(\vec{r})}{m} = -G_N \cdot \frac{M_E}{r^2} \vec{e}_r$

→ $a(r) = -G_N \frac{M_E}{r^2}$

z.B. Erdoberfläche: $r = R_E = 6378.140 \text{ km}$

$a(r=R_E) = g = 9.80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

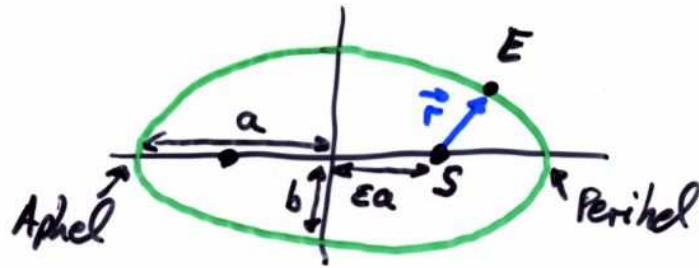
→ $M_E \approx 5.977 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

NB: Erdbeschleunigung für alle Körper gleich!

► geschlossene Bahnkurven

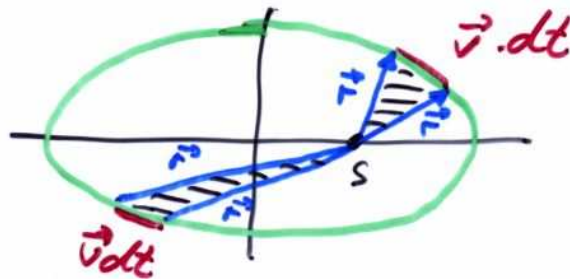
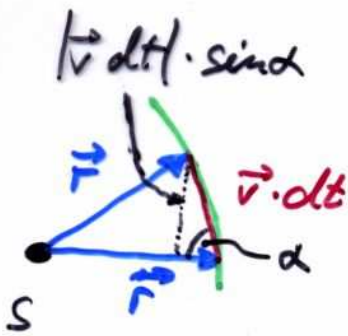
→ Planetenbahnen: Kepler Gesetze

1. Planeten bewegen sich auf Ellipsen
Sonne in einem Brennpunkt der Ellipse



a: große Halbachse
b: kleine Halbachse
e: Exzentrizität
(e=0: Kreis)

2. Radiusvektor (Fahrstrahl) Sonne → Planet
überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen

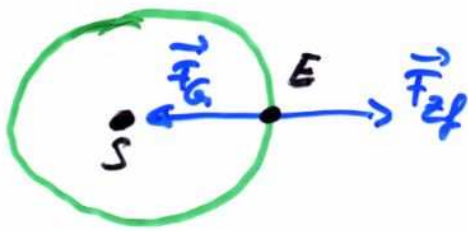


Dreiecksfläche: $dA = \frac{1}{2} |\vec{r}| \cdot |\vec{v} dt| \cdot \sin \alpha$
 $= \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| dt$

→ $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times \vec{p}| = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \text{const}$

→ Drehimpulserhaltung $|\vec{L}| = \text{const}$

3. Quadrate der Umlaufzeiten T
 \Leftrightarrow dritte Potenz der großen Halbachse



$$F_G \approx G_N \frac{M_E \cdot M_S}{r^2} \stackrel{!}{=} M_E \cdot \omega^2 \cdot r = F_{Zf}$$

$$\rightarrow \frac{G_N \cdot M_S}{r^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$\rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G_N M_S} = \text{const.}$$

NB:

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2 \cdot (M_S + m_1)}{T_2^2 \cdot (M_S + m_2)} \approx \frac{T_1^2}{T_2^2}$$

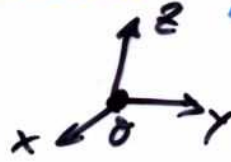
für Planeten 1,2 mit Berücksichtigung der Sonnenmasse M_S

► offene Bahnkurven:

Hyperbelbahnen (, Parabelbahnen)

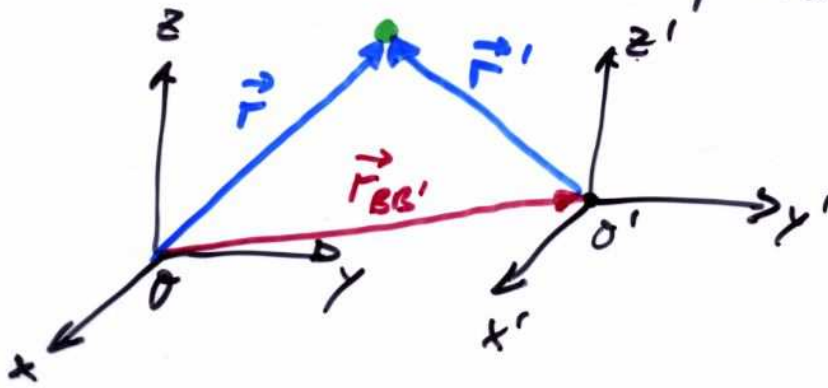
4 Beschleunigte Bezugssysteme

Bezugssystem: Koordinatensystem mit Ursprung O



Zwei Beobachter B, B' \leftrightarrow Zwei Bezugssysteme
Transformation

z.B.



$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{r}_{BB'} \\ \vec{v}' &= \dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_{BB'} \\ &= \vec{v} - \vec{v}_{BB'} \\ \vec{a}' &= \dot{\vec{v}}' = \dot{\vec{v}} - \dot{\vec{v}}_{BB'} \end{aligned}$$

- gleichförmig bewegtes Bezugssystem B' :

$$\ddot{\vec{r}}_{BB'} = 0, \quad \dot{\vec{r}}_{BB'} \neq 0$$

→ Relativgeschwindigkeit \vec{u} zwischen B und B' :

$$\vec{u} := \dot{\vec{r}}_{BB'}$$

→ Inertialsysteme

→ Galilei-Transformation zwischen Inertialsystemen

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u} \cdot t$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

$$t = t'$$

$$\vec{F} = \vec{F}'$$

NB: Nur gültig, falls $|\vec{u}| \ll c$

4.1 geradlinig beschleunigte Bezugssysteme

geradlinig beschleunigt: $\vec{u} = \vec{a}_{BB'} = \text{const} \neq 0$

$$\rightarrow \vec{a}' = \vec{a} + \vec{a}_{BB'} \rightarrow \vec{F} \neq \vec{F}'$$

$$\text{Sdlt} \rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}' + \vec{a}_{BB'} \cdot t + \underbrace{\vec{u}_0}_{\text{Relativgeschwindigkeit zw. B und B' bei } t=0}$$

$$\text{Sdlt} \rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \frac{1}{2} \vec{a}_{BB'} \cdot t^2 + \vec{u}_0 \cdot t + \underbrace{\vec{r}_0}_{\text{relativer Ort zw. B, B' bei } t=0}$$

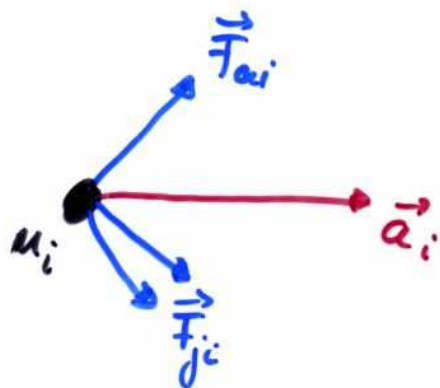
NB: B' ist kein Inertialsystem, da beschleunigt

Unterschied zwischen \vec{F} und \vec{F}'
sind Trägheitskräfte / Scheinkräfte

4.1.1 Prinzip von d'Alembert

- ruhender Beobachter

$$m_i \vec{a}_i = \underbrace{\vec{F}_{ai}}_{\text{äußere Kräfte}} + \underbrace{\sum_j \vec{F}_{ji}}_{\text{innere Kräfte}}$$

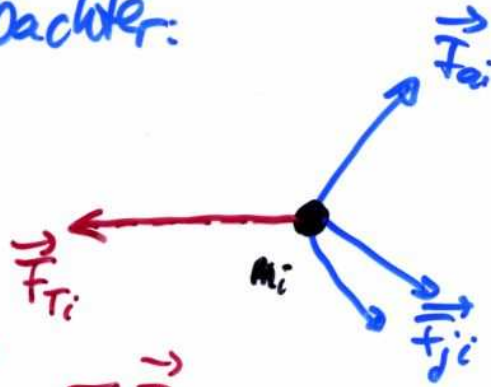


→ Bewegungsgleichung durch Dynamik des Systems geben

► Prinzip von d'Alembert

dynamisches System m_i und \vec{a}_i $\xrightarrow{\text{Trägheitskräfte}}$ $\vec{F}_{Ti} := -m_i \vec{a}_i$ statisches System

• mitbewegter Beobachter:

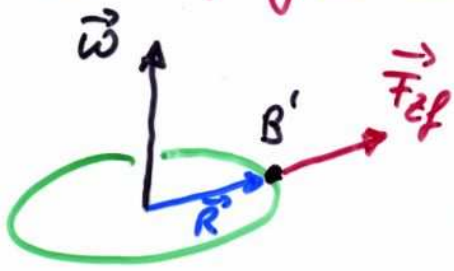


$$m_i \vec{a}_i = -\vec{F}_{Ti} = \vec{F}_{ai} + \sum_j \vec{F}_{ji}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{F}_{Ti} + \vec{F}_{ai} + \sum_j \vec{F}_{ji} = 0}$$

4.2 rotierende Bezugssysteme

- Zentrifugalkraft ist Trägheitskraft



$$\vec{F}_{Zf} = m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) = m \omega^2 \vec{R}$$

keine äußeren Kräfte:

ruhender Beobachter B:

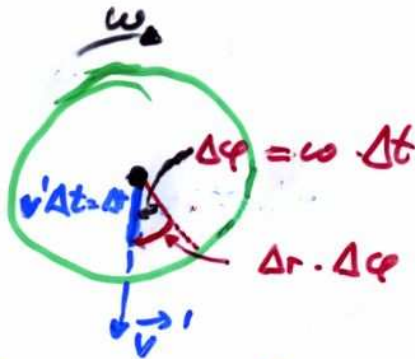
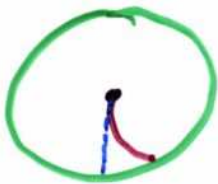
$$\vec{F}_{ges} = 0 \quad (\vec{F}_{Zf} = -\vec{F}_{Zf} \rightarrow \vec{F}_{Zf} + \vec{F}_{Zf} = 0)$$

rotierender Beobachter B':

$$\vec{F}_{ges}' = 0 + m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) = \vec{F}_{Zf}$$

weil B' mit $\vec{a}_{Zf} = \frac{\vec{F}_{Zf}}{m}$ beschleunigt

- Corioliskraft



- ▶ Massenpunkt bewegt sich mit \vec{v}' in der Zeit Δt

um

$$\Delta r = v' \cdot \Delta t$$

- ▶ Beobachter B': rotiert in Δt um

$$\Delta \varphi = \omega \cdot \Delta t$$

Massenpunkt bleibt um

$$\Delta r \cdot \Delta \varphi = (v' \cdot \Delta t) \cdot (\omega \cdot \Delta t) = v' \cdot \omega \cdot (\Delta t)^2$$

→ für B' hat Massenpunkteine Beschleunigung ^{a_c} verfahren:

$$\frac{1}{2} a_c \cdot (\Delta t)^2 \stackrel{!}{=} \Delta r \cdot \Delta \varphi = v' \cdot \omega \cdot (\Delta t)^2$$

→ $a_c = 2 v' \cdot \omega$ Coriolis = beschleunigung

mit $\vec{a}_c \perp \vec{v}'$, $\vec{a}_c \perp \vec{\omega}$

→ $\vec{a}_c = 2 \vec{v}' \times \vec{\omega}$
 $\vec{F}_c = 2 \cdot m \vec{v}' \times \vec{\omega}$ Coriolis = kraft

- Zentrifugal- und Corioliskraft sind Scheinkräfte bzw. Trägheitskräfte!

- Beispiel für rotierende Bezugssysteme

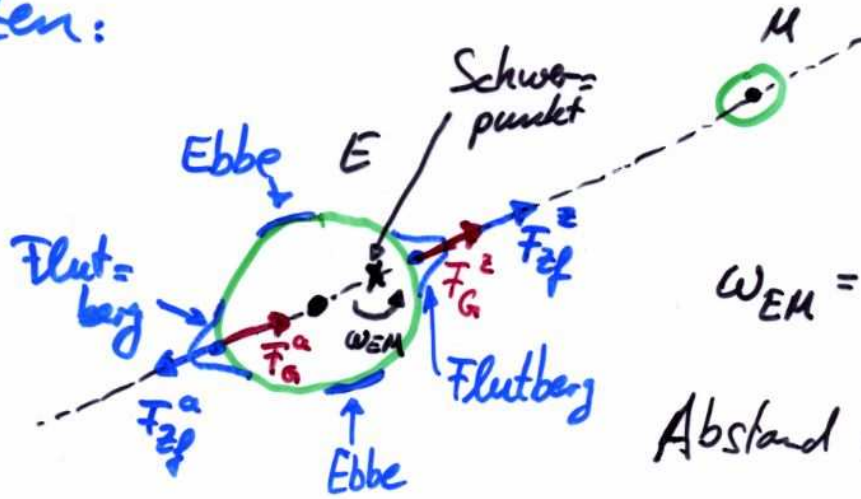
- Erdrotation

Nachgewiesen 1850 durch Foucaultsches Pendel



$$\omega_S = \omega_E \cdot \sin \varphi$$

- Gezeiten:



$$\omega_{EM} = \frac{2\pi}{27.32d} = 2.66 \cdot 10^{-6} \frac{1}{s}$$

Abstand Erde-Mond:

$$\begin{cases} r_{EM} = 380000 \text{ km} \\ R_E = 6378 \text{ km} \\ r_s = \frac{M_M}{M_E + M_M} \cdot r_{EM} \approx \frac{3}{4} R_E \\ M_M = \frac{1}{81} M_E \end{cases}$$

$$F_G^z = G_N \frac{m \cdot M_M}{(r_{EM} - R_E)^2} \approx m \cdot 3.53 \cdot 10^{-5} \frac{N}{kg}$$

$$F_{Zf}^z = m \cdot \omega_{EM}^2 \cdot (R_E - r_s) = m \cdot 1.22 \cdot 10^{-5} \frac{N}{kg}$$

$$F_G^a = G_N \frac{m \cdot M_M}{(r_{EM} + R_E)^2} = m \cdot 3.30 \cdot 10^{-5} \frac{N}{kg}$$

$$F_{Zf}^a = m \cdot \omega_{EM}^2 \cdot (R_E + r_s) = m \cdot 2.76 \cdot 10^{-5} \frac{N}{kg}$$

Mond zugewandte Seite:

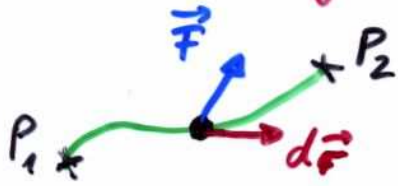
$$F_G^z + F_{Zf}^z \approx m \cdot 4.75 \cdot 10^{-5} \frac{N}{kg}$$

Mondabgewandte Seite

$$F_{Zf}^a - F_G^a \approx m \cdot 4.46 \cdot 10^{-5} \frac{N}{kg}$$

- Tief- / Hochdruckgebieten

5 Energie, Arbeit, Leistung



Arbeit

$$W := \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz$$

Einheit der Arbeit: Joule, J, $1J \hat{=} 1Nm \hat{=} 1 \frac{kg m^2}{s^2}$

NB: Wenn $\vec{F} \perp d\vec{r}$, dann $W=0$!

Beispiel: Kreisbewegung $\vec{F}_{zp} \perp$ Kreislinie

Leistung

$$P := \frac{dW}{dt}$$

"Arbeit pro Zeit"

Einheit der Leistung: Watt, W, $1W \hat{=} 1 \frac{J}{s} \hat{=} 1 \frac{kg m^2}{s^3}$

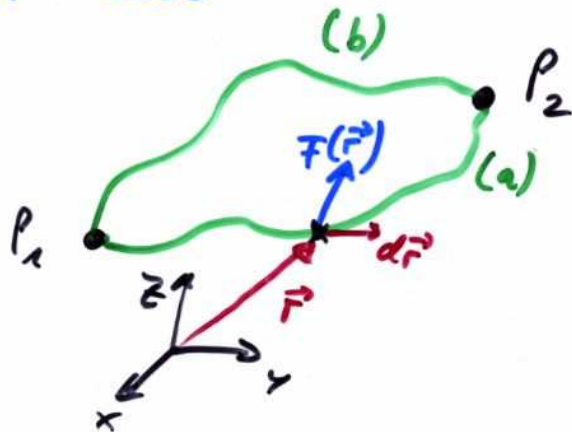
$$\blacktriangleright P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int \vec{F} d\vec{r} = \frac{d}{dt} \int \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$

\blacktriangleright Leistung bei Drehbewegung

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \cdot (\underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\vec{M}}) = \vec{\omega} \cdot \vec{M}$$

- Arbeit und konservative Kraftfelder



$$W = \int \vec{F} d\vec{r}$$

Betrachte geschlossenen Weg: $P_1 \xrightarrow{(a)} P_2 \xrightarrow{(b)} P_1$

$$W_a + W_b = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r}_a + \int_{P_2}^{P_1} \vec{F} d\vec{r}_b = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r}_a - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r}_b$$

$$\Rightarrow W_a + W_b = \oint \vec{F} d\vec{r} \stackrel{!}{=} 0$$

für konservative Kraftfelder

► Beispiel für konservative Kraftfelder

Zentralkraftfelder $\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$

► Gegenteil: dissipative Kraftfelder

- kinetische Energie

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad ; \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt$$

$$\rightarrow W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \left(m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \cdot (\vec{v} dt) = m \int \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int \vec{v} d\vec{v}$$

$$\rightarrow W = m \frac{(\vec{v})^2}{2} \Big|_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} = \frac{1}{2} m (\vec{v}_2)^2 - \frac{1}{2} m (\vec{v}_1)^2 =: E_{kin,2} - E_{kin,1} = \Delta E_{kin}$$

$$E_{kin} := \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{kinetische Energie}$$

- Rotationsenergie für Massenpunkt

$$\vec{\omega} \perp \vec{R} \rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \quad \left. \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \\ v = \omega \cdot R \end{array} \right\} \rightarrow E_{rot} = \frac{1}{2} m (\omega \cdot R)^2 = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \omega^2$$

Rotationsenergie

- Potentielle Energie in konservativen Kraftfeldern

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r} =: E_{pot}(P_1) - E_{pot}(P_2) = -\Delta E_{pot}$$

potentielle Energie

► Vorzeichenkonvention:
neg. (pos.) Arbeit bei Bewegung gegen (mit) \vec{F}

Vorzeichenkonvention bedeutet

neg. Arbeit \rightarrow Erhöhung von E_{pot}
 $\hat{=}$ Energiezufuhr

pos. Arbeit \rightarrow Reduktion von E_{pot}
 $\hat{=}$ Körper / Maschine
leistet Arbeit

z.B. $\vec{F} = -m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$

$$d\vec{r} = \vec{e}_z dr$$

$$\rightarrow W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{z_1}^{z_2} (-mg\vec{e}_z) \cdot (\vec{e}_z dr) = \int_{z_1}^{z_2} -mg dr$$

$$\rightarrow W = -mgz_2 - (-mgz_1)$$

$$= mgz_1 - mgz_2 \hat{=} E_{\text{pot}}(z_1) - E_{\text{pot}}(z_2)$$

\rightarrow

$$E_{\text{pot}}(z) = mgz$$

Energieerhaltung

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} + \dots = \text{const}$$

in konservativen
Kraftfeldern

NB: in dissipativen Feldern müssen weitere Energien
berücksichtigt werden (z.B. Wärmeenergie)

In abgeschlossenen Systemen bleibt Gesamtenergie konstant

- potentieller Energie und Kraftfeld

$$W = \int \vec{F} d\vec{r} = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz = -\Delta E_{\text{pot}}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\int F_x dx \right)}_{= F_x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\int F_y dy \right)}_{= 0} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\int F_z dz \right)}_{= 0}$$

analog $\frac{\partial W}{\partial y} = F_y$; $\frac{\partial W}{\partial z} = F_z$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}} = - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}}_{\text{Nabla-Operator}} E_{\text{pot}} = - \underbrace{\vec{\nabla} E_{\text{pot}}}_{\text{Gradient}} = -\text{grad} E_{\text{pot}}$$

Skalarfeld $E_{\text{pot}}(\vec{r})$ beschreibt Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$

Gravitationspotential:

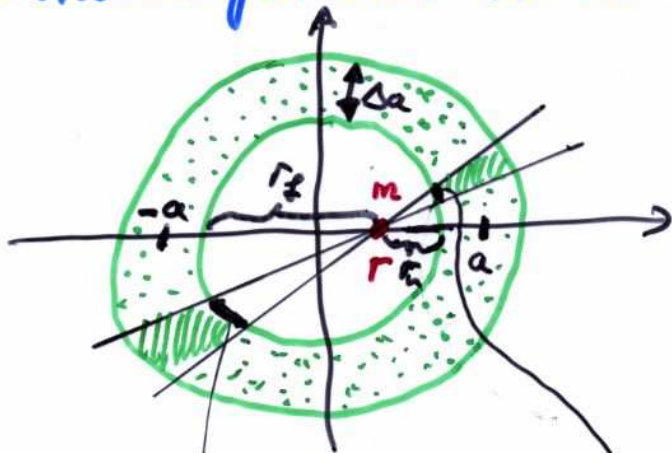
$$\vec{F} = -G_N \frac{m \cdot M}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\begin{aligned} \rightarrow W = \int \vec{F} d\vec{r} &= - \int_R^\infty G_N \frac{m \cdot M}{r^2} \vec{e}_r d\vec{r} = - \int_R^\infty G_N \frac{m \cdot M}{r^2} dr \\ &= + G_N \frac{m \cdot M}{r} \Big|_R^\infty = - G_N \frac{m \cdot M}{R} = E_{\text{pot}}(R) - \underbrace{E_{\text{pot}}(\infty)}_{:= 0} \end{aligned}$$

$$\rightarrow E_{\text{pot}}(R) = -G_N \frac{m \cdot M}{R} \quad \text{potentielle Energie des Gravitationsfeldes}$$

$$\rightarrow \boxed{\phi(R) := -G_N \frac{M}{R}} \quad \text{Gravitationspotential} \quad (\vec{g} = -\text{grad}(\phi))$$

► Gravitationspotential in Hohlkugel



$$r_f = a + r - \frac{\Delta a}{2}$$

$$r_n = a - r - \frac{\Delta a}{2}$$

Fläche $\Delta A_f \sim r_f^2$

Fläche $\Delta A_n \sim r_n^2$

Massen Volumen $\rightarrow \Delta M_f \sim \Delta A_f \cdot \Delta a$; $\Delta M_n \sim r_n^2 \cdot \Delta a$
 $\sim r_f^2 \cdot \Delta a$

pot. Energie $\sim \frac{\text{Masse}}{\text{Abstand}} \rightarrow E_{\text{pot},f} \sim G_N m \frac{\Delta M_f}{r_f}$; $E_{\text{pot},n} \sim G_N m \frac{\Delta M_n}{r_n}$

Gesamte pot. Energie $\rightarrow \Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot},f} + E_{\text{pot},n}$

$$\sim G_N \cdot m \left(\frac{\Delta M_f}{r_f} + \frac{\Delta M_n}{r_n} \right)$$

$$\sim G_N m \left(\frac{r_f^2 \cdot \Delta a}{r_f} + \frac{r_n^2 \cdot \Delta a}{r_n} \right)$$

$$\rightarrow \Delta E_{\text{pot}} \sim G_N \cdot m \underbrace{\left(r_f + r_n \right)}_{2a - \Delta a} \cdot \Delta a$$

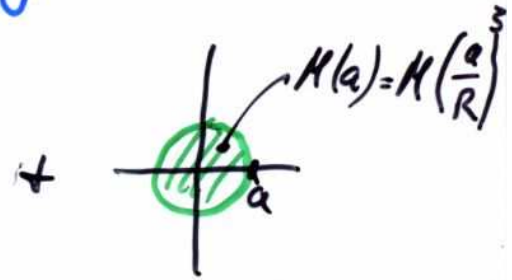
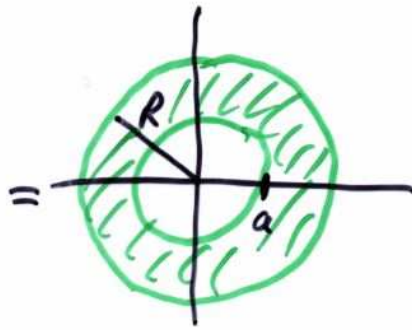
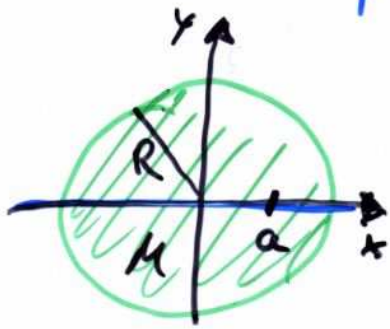
$$\rightarrow \Delta E_{\text{pot}} \sim G_N \cdot m (2a - \Delta a) \cdot \Delta a = \text{const!}$$

vollständige
Rechnung \Rightarrow

$$E_{\text{pot}} = -G_N \frac{m M}{a} = \text{const}$$

$$\vec{F} = -\text{grad} E_{\text{pot}} = 0!$$

➤ Gravitationspotential in homogener Kugel



$$E_{\text{pot}} = \text{const}$$

$$E_{\text{pot}} = -G_N \frac{M(a)}{a} = -G_N \frac{M \frac{a^3}{R^3}}{a} = -G_N \frac{M a^2}{R^3}$$

$$\rightarrow E_{\text{pot, ges}}(a) = \text{const} + \left(-G_N \frac{M a^2}{R^3} \right)$$

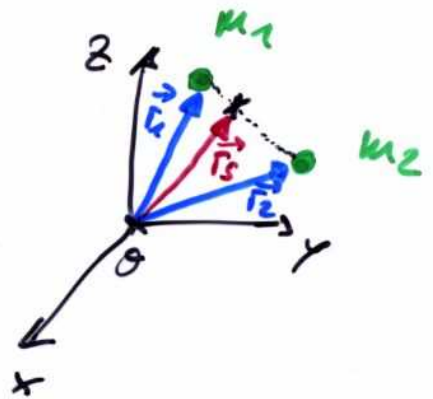
$$\rightarrow \vec{F} = -\text{grad } E_{\text{pot, ges}}(a) = \dots = \begin{pmatrix} +G_N \frac{2M a}{R^3} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

6 Systeme von Massenpunkten

Schwerpunkt

$$\vec{r}_S := \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

$$M := \sum_{i=1}^N m_i$$



Schwerpunktsgeschwindigkeit

$$\vec{v}_S = \dot{\vec{r}}_S = \frac{d\vec{r}_S}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

Schwerpunktimpuls

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = M \cdot \vec{v}_S$$

Impulserhaltungssatz (ohne äußere Kräfte)

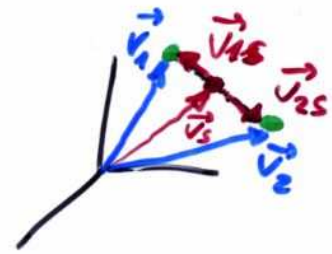
$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \text{const} \rightarrow \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i = \left(\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \right) = \dot{\vec{P}} = 0$$

Schwerpunktsatz (mit äußeren Kräften)

$$\vec{F}_a = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ai} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \vec{p}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right) = \frac{d}{dt} \vec{P} = M \frac{d\vec{v}_S}{dt} =: M \vec{a}_S$$

Bewegung des Schwerpunkts S so als ob alle Masse in S konzentriert und alle Kräfte in S angreifen

• kinetische Energie ($\frac{1}{2}mv^2$)



betrachte: $\vec{v}_i = \vec{v}_{is} + \vec{v}_s$

$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i, \vec{P} = M \cdot \vec{v}_s \rightarrow \vec{p}_i = m_i \vec{v}_i = m_i \cdot \vec{v}_{is} + m_i \cdot \vec{v}_s$

$= m_i \vec{v}_{is} + m_i \frac{M}{M} \vec{v}_s$

$= m_i \vec{v}_{is} + \frac{m_i}{M} \vec{P}$

$\rightarrow \vec{p}_i = \vec{p}_{is} + \frac{m_i}{M} \vec{P}$

$\rightarrow \sum_{i=1}^N \vec{p}_{is} = \sum_{i=1}^N \left(\vec{p}_i - \frac{m_i}{M} \vec{P} \right) = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i - \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \vec{P}$

$= \sum_{i=1}^N \vec{p}_i - \frac{\vec{P}}{M} \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i}_{=M}$

$= \left(\sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right) - \vec{P} = 0$

$\rightarrow E_{kin} = \sum_{i=1}^N E_{kin,i} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{m_i^2 \vec{v}_i^2}{2m_i} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i}$

$= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \left[\vec{p}_{is} + \frac{m_i}{M} \vec{P} \right]^2$

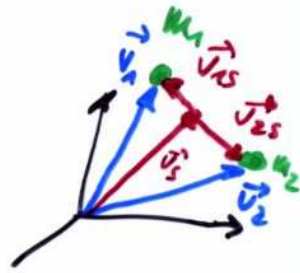
$= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \left[\vec{p}_{is}^2 + \frac{m_i^2}{M^2} \vec{P}^2 + 2 \frac{m_i}{M} \vec{P} \cdot \vec{p}_{is} \right]$

$= \underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_{is}^2}{2m_i}}_{\text{bezüglich Schwerpunkt}} + \underbrace{\frac{\vec{P}^2}{M^2} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2m_i}}_{= \frac{M}{2}} + \underbrace{\frac{\vec{P}}{M} \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{p}_{is}}{m_i}}_{= \sum \vec{p}_{is} = 0}$

$\rightarrow E_{kin} = \underbrace{E_{kin}^{(s)}}_{\text{bezüglich Schwerpunkt}} + \frac{\vec{P}^2}{2M}$ kinetische Energie
des Schwerpunkts

• reduzierte Masse in Zweikörpersystem

$$\sum \vec{p}_{is} = 0 = \vec{p}_{1s} + \vec{p}_{2s} = 0 \rightarrow \vec{p}_{1s} = -\vec{p}_{2s} =: \vec{p}_{12}$$



$$E_{kin}^{(s)} = \frac{\vec{p}_{1s}^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_{2s}^2}{2m_2} = \frac{\vec{p}_{12}^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_{12}^2}{2m_2} = \frac{\vec{p}_{12}^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)}_{=: \frac{1}{\mu}} \cdot \vec{p}_{12}^2$$

$$\rightarrow \mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

reduzierte Masse

$$\rightarrow E_{kin}^{(s)} = \frac{1}{2} \frac{p_{12}^2}{\mu} = \frac{1}{2} \mu v_{12}^2 \quad \text{mit } \vec{v}_{12} := \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

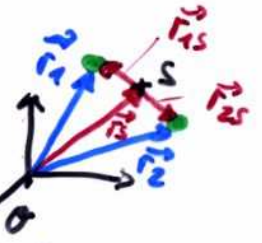
$$\left(\vec{v}_{12} := \frac{1}{\mu} \vec{p}_{12} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{p}_{1s} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{p}_{1s} = \frac{\vec{p}_{1s}}{m_1} + \frac{\vec{p}_{1s}}{m_2} \right)$$

$$= \frac{\vec{p}_{1s}}{m_1} - \frac{\vec{p}_{2s}}{m_2} = \vec{v}_{1s} - \vec{v}_{2s} = (\vec{v}_{1s} + \vec{v}_s) - (\vec{v}_{2s} + \vec{v}_s) = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

• Drehimpuls

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_{is} + \vec{r}_s) \times (\vec{v}_{is} + \vec{v}_s)$$

= . . . (ausmultiplizieren und vereinfachen) . . .



$$\vec{L}_O = \underbrace{\vec{r}_s \times \vec{P}}_{\text{Schwerpunkt}} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_{is} \times \vec{p}_{is} =: \vec{r}_s \times \vec{L} + \underbrace{\vec{L}_s}_{\text{bezüglich Schwerpunkt}}$$

bezüglich Ursprung O

• Drehmoment

$$\vec{D}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \underbrace{\vec{v}_S \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r}_S \times \dot{\vec{p}} + \underbrace{\sum \vec{r}_{is} \times \vec{p}_{is}}_{=0} + \sum \vec{r}_{is} \times \dot{\vec{p}}_{is}$$

$$\begin{aligned} \vec{D}_O &= \vec{r}_S \times \dot{\vec{p}} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_{is} \times \dot{\vec{p}}_{is} \\ &= \vec{r}_S \times \vec{F}_a + \sum_{i=1}^N \vec{r}_{is} \times \vec{F}_{is} \\ &= \vec{r}_S \times \vec{F}_a + \sum_{i=1}^N \vec{r}_{is} \times \vec{F}_{ai} \\ \vec{D}_O &:= \underbrace{\vec{r}_S \times \vec{F}_a}_{\text{Schwerpunkt}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{r}_{is} \times \vec{F}_{ai}}_{\text{bezüglich Schwerpunkt S}} \end{aligned}$$

$$\vec{F}_a = \dot{\vec{p}} \quad (\text{Schwergesetz})$$

$$\vec{F}_{is} = \vec{F}_{ai} + \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik}$$

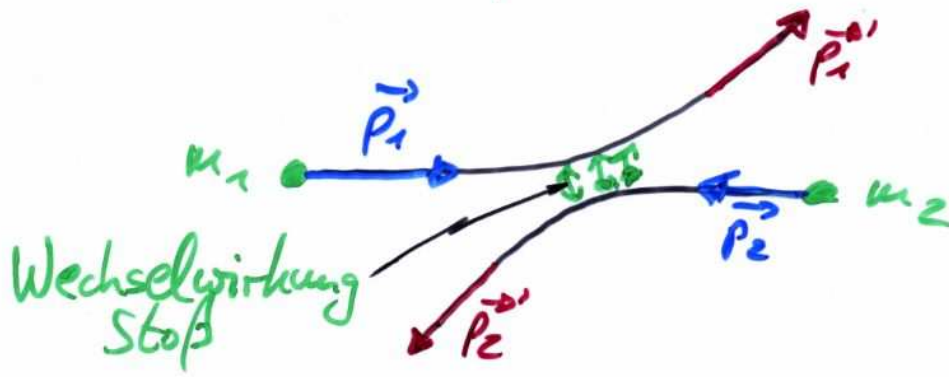
$$\vec{D}_S := \sum_{i=1}^N \vec{r}_{is} \times \vec{F}_{ai}$$

→ bezüglich Ursprung O

Schwerpunkt

bezüglich Schwerpunkt S

6.1 Stöße (zwischen zwei Teilchen)



$$\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad \text{Impulssatz (ohne äußere Kräfte)}$$

$$E_{\text{kin}}' = \frac{\vec{p}_1'^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2'^2}{2m_2} = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + Q \quad \text{Energiesatz}$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\vec{p}_{1S}^2}{2\mu} + \frac{\vec{P}^2}{2M} \quad ; \quad \vec{p}_{1S} = -\vec{p}_{2S}$$

$$\rightarrow \frac{\vec{p}_{1S}^2}{2\mu} + \frac{\vec{P}^2}{2M} = \frac{\vec{p}_{1S}^2}{2\mu} + \frac{\vec{P}^2}{2M} + Q$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\vec{p}_{1S}^2}{2\mu} = \frac{\vec{p}_{1S}^2}{2\mu} + Q} \quad \text{Energiesatz}$$

Arten von Stößen

- $Q = 0$ elastische Stöße
- $Q < 0$ inelastische Stöße (kinet. Energie \rightarrow innere Energie)
- $Q > 0$ superelastische Stöße (innere Energie \rightarrow kinet. Energie)

NB: inelastische / superelastische Stöße
 \Leftrightarrow ein Stoßpartner hat innere Struktur

► Zentrale Stöße



► Nicht-zentrale Stöße



Zentrale Stöße

- elastischer Stoß ($Q=0$)

Wähle ruhenden Stoßpartner: $p_2 = 0$

$$p_1 = p_1' + p_2' \Rightarrow m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \Rightarrow m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$$

$$\boxed{v_2' = \frac{m_1 v_1 - m_1 v_1'}{m_2} = \frac{m_1}{m_2} (v_1 - v_1')}$$

$$m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 \left[\frac{m_1}{m_2} (v_1 - v_1') \right]^2$$

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = \frac{m_1^2}{m_2} (v_1 - v_1')^2$$

$$m_2 (v_1^2 - v_1'^2) = m_1 (v_1 - v_1')^2 \quad | \cdot \frac{1}{v_1 - v_1'}$$

$$\boxed{m_2 (v_1 + v_1') = m_1 (v_1 - v_1')}$$

→ ... →

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

$v_1' \rightarrow$ in $v_2' = \dots$
eingesetzt

$$\rightarrow p_1 = m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} m_1 v_1 + \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1 = p_1' + p_2'$$

$$\rightarrow \boxed{p_1 = p_1' + 2\mu \cdot v_1} \rightarrow p_2' = 2\mu v_1$$

Beispiele:

$$\blacktriangleright m_1 = m_2 =: m \rightarrow v_1' = 0 \cdot v_1 = 0$$
$$v_1 \neq 0, v_2 = 0 \quad v_2' = \frac{2m}{m+m} v_1 = v_1$$

$$\blacktriangleright m_1 = \frac{1}{2} m_2 \rightarrow v_1' = \frac{\frac{1}{2} m_2 - m_2}{\frac{1}{2} m_2 + m_2} \cdot v_1 = \frac{-\frac{1}{2} m_2}{\frac{3}{2} m_2} v_1 = -\frac{1}{3} v_1$$
$$v_2' = \frac{m_2}{\frac{1}{2} m_2 + m_2} \cdot v_1 = \frac{1 m_2}{\frac{3}{2} m_2} v_1 = \frac{2}{3} v_1$$

$$\blacktriangleright m_1 = 2 m_2 \rightarrow v_1' = \frac{2 m_2 - m_2}{2 m_2 + m_2} v_1 = \frac{1 m_2}{3 \cdot m_2} v_1 = \frac{1}{3} v_1$$
$$v_2' = \frac{4 m_2}{3 m_2} v_1 = \frac{4}{3} v_1$$

Energieübertrag 1 → 2:

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{p_2'^2}{2 m_2} = \frac{2 \mu^2}{m_2} v_1^2 \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$
$$= \frac{4 m_2 m_1}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot E_{\text{kin},1}$$



$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot E_{\text{kin},1} = \frac{4 \mu}{m_1 + m_2} \cdot E_{\text{kin},1}$$

• maximal inelastische / total unelastische
zentrale Stöße

d.h. $v_1' = v_2' =: v'$

$$p_2 = m_2 v_2 = 0: \quad m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' = (m_1 + m_2) v'$$

$$Q + \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2$$

→ $v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$ und $Q = \dots = - \frac{\mu}{2} v_1^2$

↑ s.u.
Zunahme
der inneren
Energie

innere
kinet.
Energie
bezgl.
Schwerpunktes

$$Q = \frac{m_1 + m_2}{2} v'^2 - \frac{m_1 v_1^2}{2} = \left(\frac{m_1 + m_2}{2} \cdot \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} - \frac{m_1}{2} \right) v_1^2$$

$$= \frac{m_1}{2} \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} - 1 \right) v_1^2 = - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{v_1^2}{2} = - \frac{\mu}{2} v_1^2$$

Nicht-zentrale Stöße

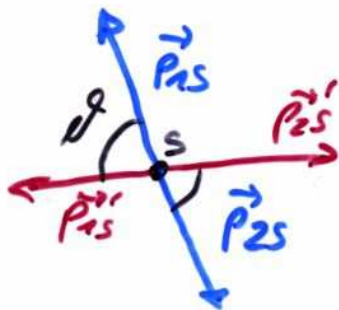
► Impulsatz: $\vec{L} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$

► Drehimpulsatz: $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_1' + \vec{L}_2'$
 (ohne äußere Kräfte) \hookrightarrow Stoß läuft in Ebene $\perp \vec{L}$ ab
 \hookrightarrow Stoßebene

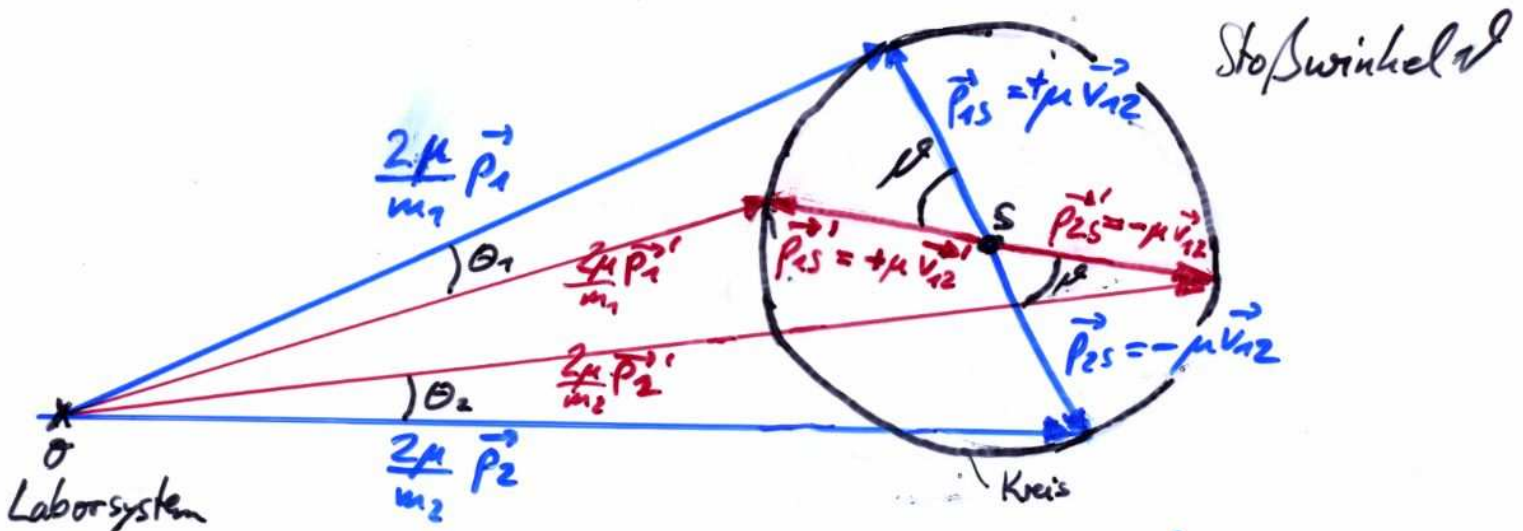
► Energiesatz: $Q + \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}$

• Stoß im Schwerpunktsystem:

elast. Stoß
im Schwerpunktsystem

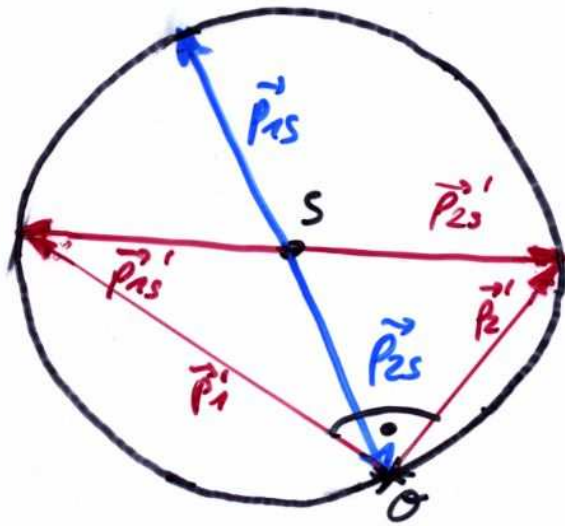


$0 = \vec{p}_{1s} + \vec{p}_{2s} = \vec{p}_{1s}' + \vec{p}_{2s}' = 0$
 \hookrightarrow elastischer Stoß
 dreht \vec{p}_{1s} nach \vec{p}_{1s}' ,
 aber $|\vec{p}_{1s}| = |\vec{p}_{1s}'|$



NB: Diagramm mit Geschwindigkeiten \rightarrow Newton-Diagramm

► Spezialfall: $m_1 = m_2 =: m$ und $\vec{p}_2 = 0$ (aber $\vec{p}_{2s} \neq 0$)
→ $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m \cdot m}{m + m} = \frac{m}{2}$

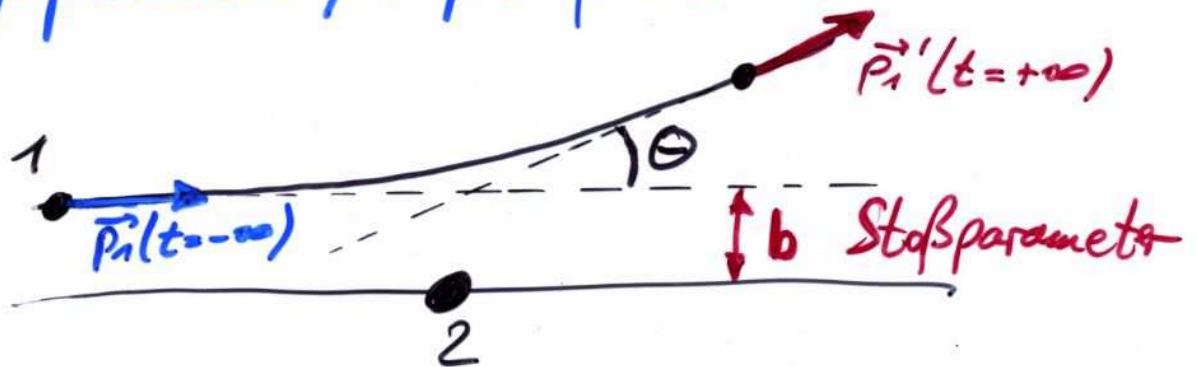


(Thaleskreis)

→ 90° Winkel zwischen Stoßpartnern nach Stoß!

• Stoß zwischen ausgedehnten Körpern

▶ Stoßparameter / Impaktparameter



■ Stoßparameter / Impaktparameter b
 \leftrightarrow Zentralität des Stoßes

▲ $b = 0 \leftrightarrow$ zentraler Stoß

▲ $b > 0 \leftrightarrow$ Nicht-zentraler Stoß

■ Streuwinkel / Ablenkwinkel Θ
ist Funktion des Stoßparameters b

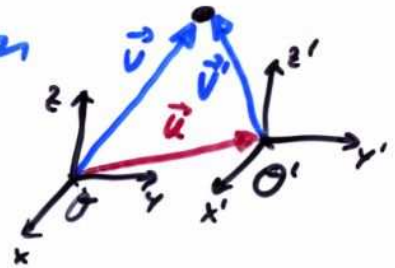
NB: Nicht-zentraler (= exzentrischer) Stoß
zwischen Körpern \rightarrow Drehmomente treten auf
 \rightarrow Drehimpulse ändern sich

7 (Spezielle) Relativitätstheorie

- ▶ klassische Geschwindigkeitsaddition

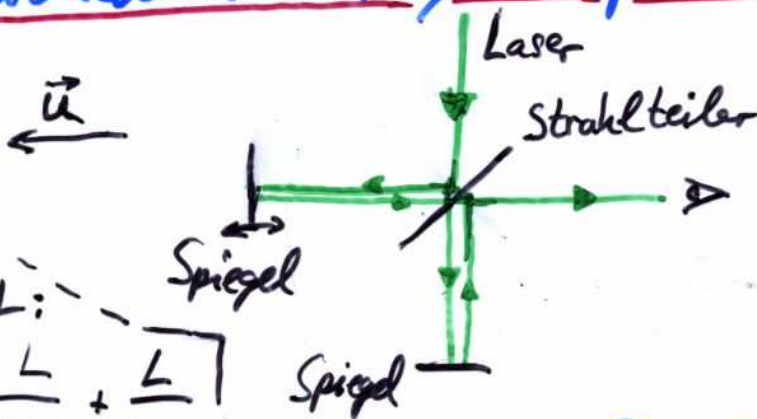
Galilei-Transformation

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$$



gilt nur $v, u \ll c$

- ▶ Michelson-Morley-Experiment



Armlänge L :

$$t_{\text{links}} = \frac{L}{c+u} + \frac{L}{c-u}$$

$$\rightarrow t_{\text{links}} = \frac{2Lc}{c^2 - u^2}$$

$$t_{\text{unten}} = \frac{L}{c} + \frac{L}{c} = \frac{2L}{c}$$

Experiment zeigt keinen Effekt, egal wohin \vec{u} zeigt



Lichtgeschwindigkeit in allen Bezugssystemen (Inertialsystemen) gleich!

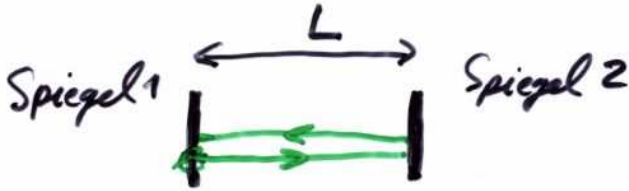
+ alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt!

→ spezielle Relativitätstheorie

7.1 Konsequenzen aus $c = \text{const}$

Zeitdilatation

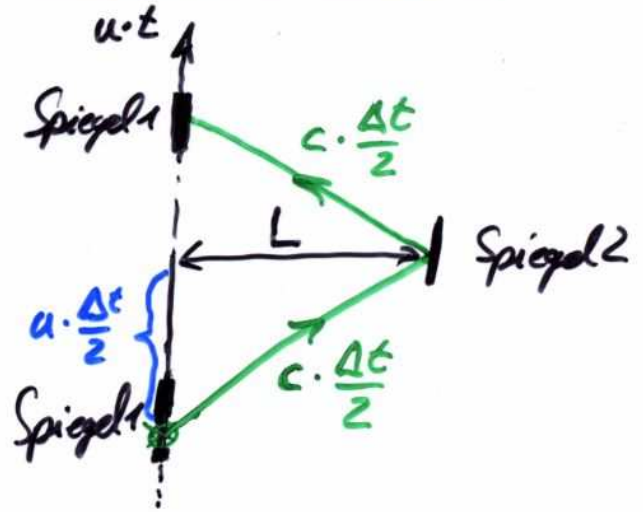
► Einsteins Lichtuhr



$$\Delta t' = \frac{2L}{c}$$

■ bewegtes System S'
→ ruhende Uhr

$$\Delta t' = \frac{2L}{c}$$



■ ruhendes System S
→ mit $u \neq 0$ bewegte Uhr

$$c \cdot \frac{\Delta t}{2} = \sqrt{L^2 + \left(u \cdot \frac{\Delta t}{2}\right)^2}$$

$$\hookrightarrow c^2 (\Delta t)^2 = (2L)^2 + u^2 (\Delta t)^2$$

$$\hookrightarrow c^2 (\Delta t)^2 - u^2 (\Delta t)^2 = (2L)^2$$

$$\hookrightarrow (\Delta t)^2 = \frac{(2L)^2}{c^2 - u^2} = \left(\frac{2L}{c}\right)^2 \frac{c^2}{c^2 - u^2}$$

mit Lorentzfaktor $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \geq 1$

$$\Delta t = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \Delta t' \cdot \gamma$$

Zeitdilatation

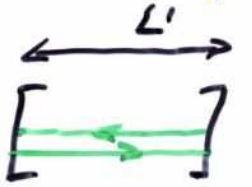
→ Im ruhenden Inertialsystem erscheint Zeit im bewegten System langsamer zu vergehen

Beispiel:

- kosmische Höhenstrahlung (Lebensdauer $t = 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$, $c \cdot t \approx 660 \text{ m}$)
(Erzeugung in 3km Höhe, erreichen Erdboden)
- Atomuhr in Flugzeug (40h ostwärts Flug → ~59ns nach)
(40h westwärts → ~275ns vor)

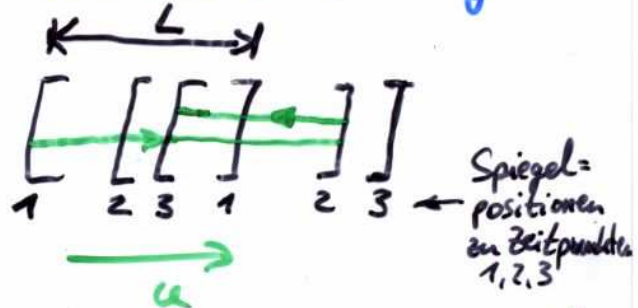
Längenkontraktion

mitbewegtes System S'
 → ruhende Uhr



$$\Delta t' = \frac{2L'}{c}$$

ruhendes System S
 → mit $u \neq 0$ bewegte Uhr



$$ct_{12} = L + ut_{12} \rightarrow t_{12} = \frac{L}{c-u}$$

$$ct_{23} = L - ut_{23} \rightarrow t_{23} = \frac{L}{c+u}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \Delta t &= t_{12} + t_{23} = L \left(\frac{1}{c-u} + \frac{1}{c+u} \right) \\ &= L \cdot \frac{(c+u) + (c-u)}{(c-u)(c+u)} = L \cdot \frac{2c}{c^2 - u^2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \Delta t = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{2L}{c} \gamma^2$$

Zeitdilatation $\Delta t = \Delta t' \cdot \gamma \rightarrow \Delta t' \cdot \gamma = \frac{2L'}{c} \cdot \gamma = \frac{2L}{c} \gamma^2$

$$\rightarrow L' = L \cdot \gamma$$

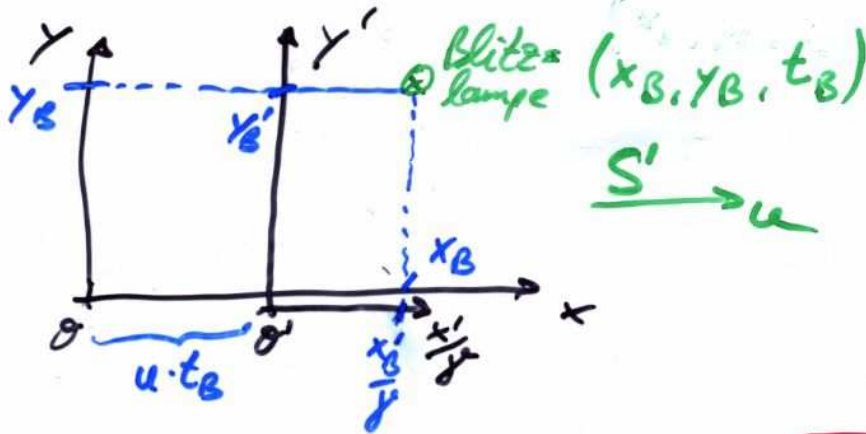
$$\rightarrow L = \frac{L'}{\gamma} = L' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

Längenkontraktion ($\gamma \geq 1$)

→ In ruhendem Inertialsystem erscheint ein bewegter Maßstab verkürzt.

7.2 Lorentztransformation

• Ortstransformation



$$\rightarrow \frac{x'_B}{\gamma} = x_B - u \cdot t_B$$

$$y'_B = y_B$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} x'_B &= \gamma \left[x_B - \frac{u}{c} \cdot ct_B \right] \\ y'_B &= y_B, \quad z'_B = z_B \end{aligned}}$$

NB: Umkehrtransformation $x_B = \gamma \left[x'_B - \frac{(-u)}{c} \cdot ct'_B \right]$

• Zeittransformation

aus Umkehrtransf.

$$x_B = \gamma \left[x'_B + \frac{u}{c} \cdot ct'_B \right]$$

$$\rightarrow ct'_B = \frac{c}{u} \left[\frac{x_B}{\gamma} - x'_B \right] = \frac{c}{u} \left[\frac{x_B}{\gamma} - \gamma \left[x_B - \frac{u}{c} \cdot ct_B \right] \right]$$

$$= \gamma \frac{c}{u} \left[\frac{x_B}{\gamma^2} - x_B + \frac{u}{c} \cdot ct_B \right] = \gamma \frac{c}{u} \left[x_B \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) + \frac{u}{c} \cdot ct_B \right]$$

$$= \gamma \frac{c}{u} \left[-\frac{u^2}{c^2} \cdot x_B + \frac{u}{c} \cdot ct_B \right]$$

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) - 1 = -\frac{u^2}{c^2}$$

$$\rightarrow \boxed{ct'_B = \gamma \left[ct_B - \frac{u}{c} x_B \right]}$$

Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} ct'_B \\ x'_B \\ y'_B \\ z'_B \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{4 \times 4\text{-Matrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} ct_B \\ x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}}_{\text{Vier-Vektor}} \quad \text{mit } \beta = \frac{u}{c}$$

kurz:
$$\begin{pmatrix} ct'_B \\ x'_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_B \\ x_B \end{pmatrix}$$

• Relativistische Geschwindigkeitsaddition

$$v'_x = \frac{dx'_B}{dt'_B} = \frac{dx'_B}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'_B} = \frac{d}{dt} \left(\gamma \left[x - \frac{u}{c} \cdot ct \right] \right) \cdot \frac{dt}{dt'_B}$$

$$= \gamma \left[\frac{dx}{dt} - \frac{u}{c} \cdot c \frac{dt}{dt} \right] \cdot \frac{dt}{dt'_B}$$

$$= \gamma \left[v_x - \frac{u}{c} \cdot c \right] \cdot \frac{dt}{dt'_B} = \gamma [v_x - u] \cdot \frac{dt}{dt'_B}$$

dabei ist:

$$\frac{dt}{dt'_B} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ct'_B}{c} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{c} \cdot \gamma [ct - \frac{u}{c} x] \right) = \dots = \gamma \left[1 - \frac{u}{c^2} v_x \right]$$

$$\rightarrow v'_x = \gamma \cdot [v_x - u] \frac{1}{\gamma \left[1 - \frac{u}{c^2} v_x \right]} \rightarrow \boxed{v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}}$$

$$v_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = v_y \frac{1}{\gamma \left[1 - \frac{u}{c^2} v_x \right]}$$

$$\rightarrow \boxed{v_y' = v_y \frac{1}{\gamma \left[1 - \frac{u}{c^2} v_x \right]} \quad ; \quad v_z' = v_z \frac{1}{\gamma \left[1 - \frac{u}{c^2} v_x \right]}}$$

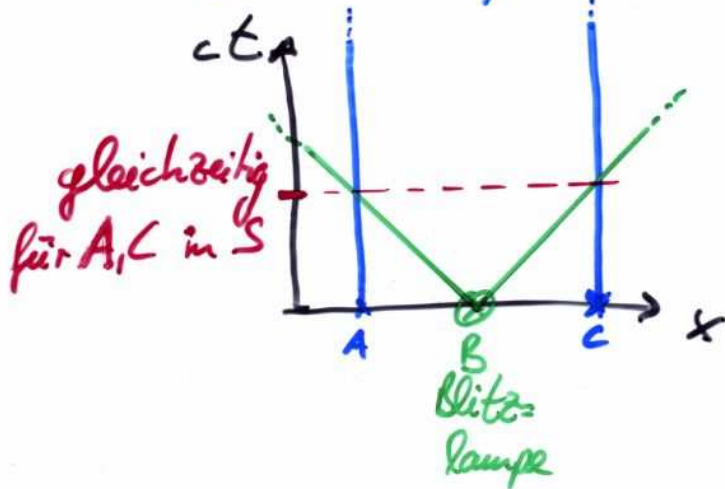
NB: Für $u \ll c$:

$$\left. \begin{array}{l} v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u v_x}{c^2}} \rightarrow v_x' \approx v_x - u \\ v_y' = \dots \rightarrow v_y' \approx v_y \\ v_z' = \dots \rightarrow v_z' \approx v_z \end{array} \right\} \hat{=} \text{Galilei-Transformation}$$

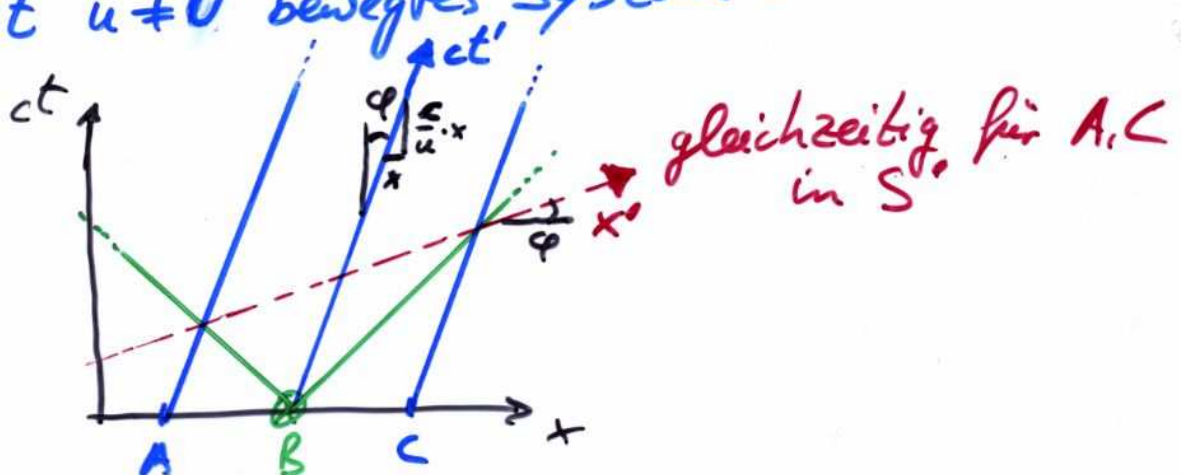
$$\blacktriangleright v_x = c \rightarrow v_x' = \frac{c - u}{1 - \frac{u}{c} \cdot c} = \frac{c \left(1 - \frac{u}{c} \right)}{1 - \frac{u}{c}} = c \quad !$$

7.3 Gleichzeitigkeit

- ruhendes System S



- mit $u \neq 0$ bewegtes System S'

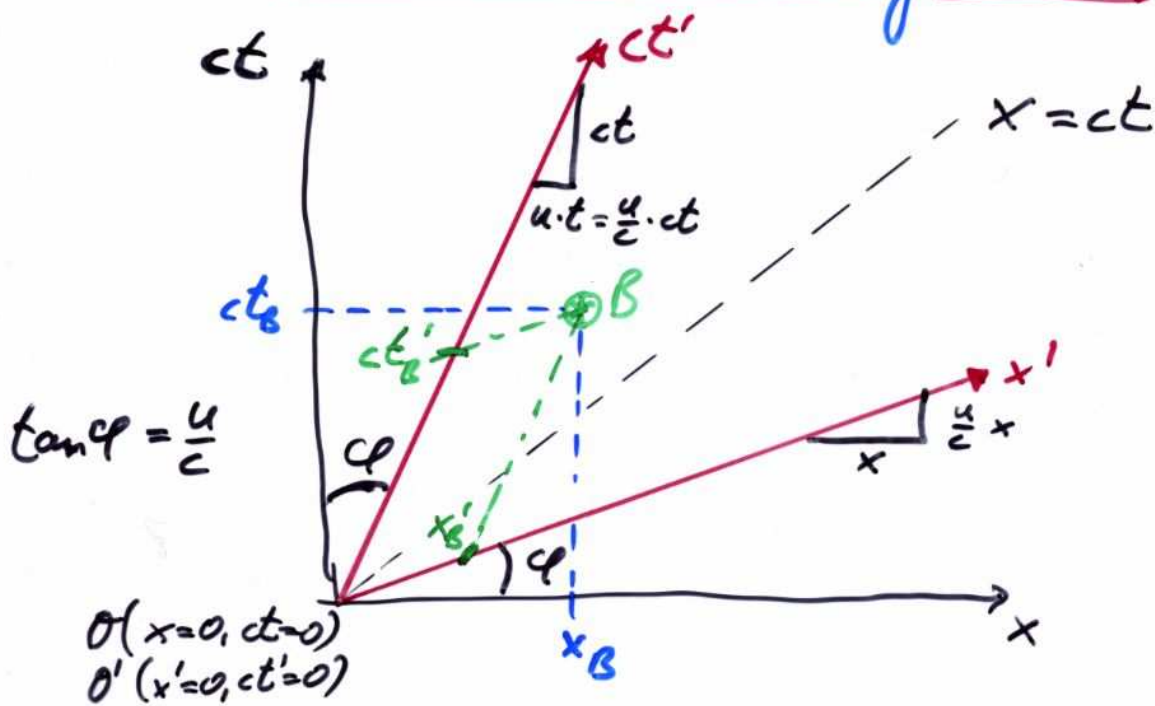


Für mitbewegte Beobachter A, C erreicht Lichtblitz A und C gleichzeitig!

→ $ct' = \text{const}$ entlang gestrichelter Linie (x' -Achse)

- ▶ x', ct' -Achsen sind gegenüber x, ct -Achse geneigt
- ▶ x', ct' -Achsen sind nicht orthogonal zueinander
- ▶ Winkel zwischen x, x' und ct, ct' -Achse: $\tan \varphi = \frac{u}{c}$

7.4 Minkowski-Diagramm



- Lorentztransformation $(x_B, ct_B) \leftrightarrow (x'_B, ct'_B)$

- Maßstab für "relativist. Distanzen"

- ▶ unverändert (invariant) bei Lorentztransf.

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - (x')^2$$

→ ergibt in allen Inertialsystemen den gleichen Wert

NB: Maßstab \neq einfache Zeit-/Längendifferenz

→ entspricht nicht gewohnten Abstände

→ Paradoxien

7.5 Paradoxien der Relativitätstheorie

• Längenkontraktion in $S \leftrightarrow S'$

(Garagenparadoxon)

in S : bewegter Maßstab L_x von S'
erscheint in S verkürzt: $L = \frac{L_x}{\gamma}$

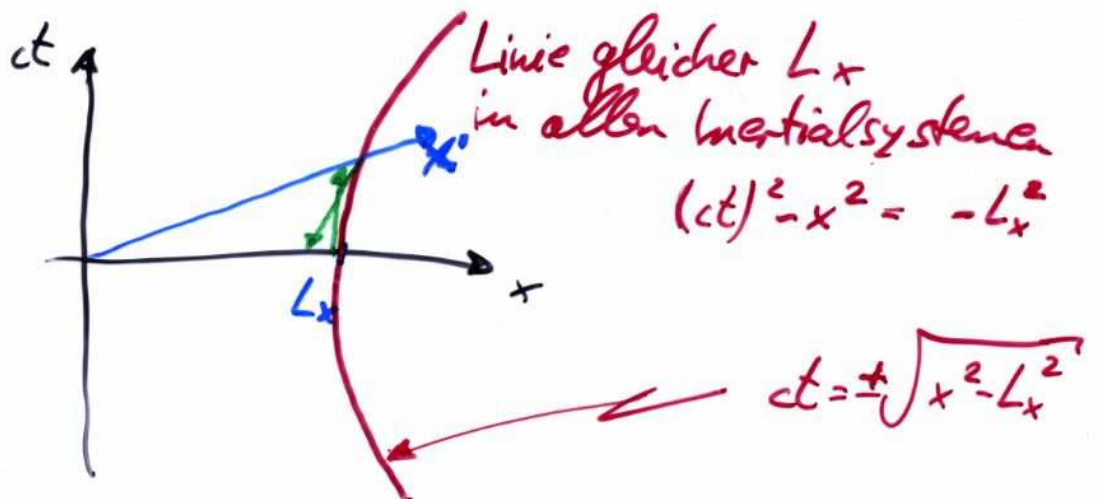
$$\underbrace{L_x = x_2' - x_1'}_{\text{in } S'} = \gamma[x_2 - ut] - \gamma[x_1 - ut] \\ = \gamma[x_2 - x_1] = \gamma \underbrace{L}_{\text{in } S}$$

in S' : ruhender Maßstab L_x von S
erscheint in S' verkürzt: $L' = \frac{L_x}{\gamma}$

$$\underbrace{L_x = x_2 - x_1}_{\text{in } S} = \gamma[x_2' + ut'] - \gamma[x_1' + ut'] \\ = \gamma[x_2' - x_1'] = \gamma \underbrace{L'}_{\text{in } S'}$$

Grund:

- ▶ Inertialsysteme S, S' sind gleichberechtigt
- ▶ Lorentztransf. für Längendifferenzen ist unabhängig vom Vorzeichen von u (u^2 im γ)



• Zeitdilatation in $S \leftrightarrow S'$

(Uhrenparadoxon)

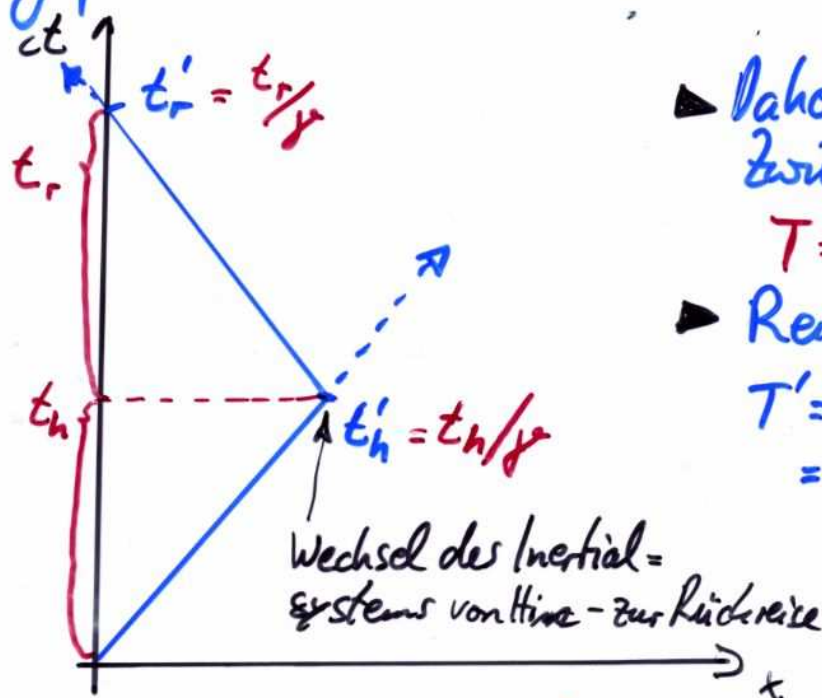
in S : Zeitdauer Δt_x von S'
erscheint in S verlängert: $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_x$

$$\underbrace{\Delta t = t_2 - t_1}_{\text{in } S} = \gamma \left(t_2' + \frac{ux'}{c^2} \right) - \gamma \left(t_1' + \frac{ux'}{c^2} \right) = \gamma \underbrace{(t_2' - t_1')}_{\text{in } S'} = \gamma \Delta t_x$$

in S' : Zeitdauer Δt_x von S
erscheint in S' verlängert: $\Delta t' = \gamma \Delta t_x$

$$\underbrace{\Delta t' = t_2' - t_1'}_{\text{in } S'} = \gamma \left(t_2 - \frac{ux}{c^2} \right) - \gamma \left(t_1 - \frac{ux}{c^2} \right) = \gamma \underbrace{(t_2 - t_1)}_{\text{in } S} = \gamma \Delta t_x$$

• Zwillingsparadoxon



▶ Dahin-gebliebener Zwilling:

$$T = t_h + t_r$$

▶ Reisender Zwilling

$$T' = t_h' + t_r' = \frac{t_h}{\gamma} + \frac{t_r}{\gamma} = \frac{T}{\gamma}$$

→ Altersunterschied beim Wiedersehen: $\Delta T = T - T' = T \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) > 0$

7.6 relativistische Dynamik

• Impulserhaltung (1. Newtonsche Axiom)

▶ klassisch: $\frac{dp}{dt} = 0$ ohne äußere Kräfte
in allen Inertialsystemen

▶ relativistisch: $\frac{dp}{dt} \stackrel{!}{=} 0$ ——— a ———

↳ Lorentztransf. des Impulses

↳ relativist. Geschwindigkeitsaddition $v' = \frac{v-u}{1 - \frac{vu}{c^2}}$

betrachte: $\gamma' v' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \cdot v' = \frac{v-u}{1 - \frac{vu}{c^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = \textcircled{*}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v - \frac{u}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c \right]$$

→ $\gamma' v' =: \gamma_u \cdot [\gamma_v \cdot v - \beta_u \cdot \gamma_v c]$

$$\begin{aligned} \textcircled{*} \left(\frac{v-u}{1 - \frac{vu}{c^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right)^2 &= \frac{(v-u)^2}{\left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)^2 \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)} \stackrel{v' = \dots}{=} \frac{(v-u)^2}{\left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{(v-u)^2}{\left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)^2}\right)} = \frac{(v-u)^2}{\left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)^2 - \frac{1}{c^2} (v-u)^2} \\ &= \frac{(v-u)^2}{1 - 2 \frac{vu}{c^2} + \frac{v^2 u^2}{c^4} - \frac{v^2}{c^2} + \frac{2vu}{c^2} - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{(v-u)^2}{1 - \frac{u^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{u^2}{c^2} - 1\right)} = \frac{(v-u)^2}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} =: \gamma_u^2 \gamma_v^2 (v-u)^2 \end{aligned}$$

γv hat Eigenschaft einer Lorentz-Transformation \rightarrow relativist. Impuls:

$$\vec{p}' = m \gamma' \vec{v}' = \gamma_u [m \gamma v - \beta_u m \gamma c] = \gamma_u [p - \beta_u p_0]$$

Lorentztransformation des relativist. Impulses

mit $p_0 := m \gamma c$ als Komponente des

Impuls-Vierervektors

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma m c \\ \gamma m v_x \\ \gamma m v_y \\ \gamma m v_z \end{pmatrix}$$

$$\left(\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}}} \right)$$

$$p_0' = m \gamma' c = \gamma_u [p_0 - \beta_u p]$$

Lorentztransf.
der relativist.
Energie $E_{rel} = p_0 c$

} \rightarrow

$$\begin{pmatrix} p_0' \\ \vec{p}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_u & -\beta_u \gamma_u \\ -\beta_u \gamma_u & \gamma_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

mit relativistischem Impuls

$$\vec{p} := \gamma m \vec{v}$$

und relativistischer Energie E_{rel}

$$p_0 := \gamma m c = \frac{E_{rel}}{c}$$

• Impulserhaltung (1. Newtonsche Axiom)

▶ klassisch: $\dot{p} = \frac{dp}{dt} = 0 \xrightarrow{S \rightarrow S'}$ $\begin{matrix} v \rightarrow v' = v - u \\ p \rightarrow p' = p - mu \end{matrix}$ $\dot{p}' = \dot{p} - m\dot{u} = 0$

▶ relativistisch: $\dot{p} = 0 \xrightarrow{S \rightarrow S'} \dot{p}' = \frac{dp'}{dt}$

$$\frac{dp'}{dt} = \frac{d}{dt} (\gamma_u [p - \beta_u p_0]) = \gamma_u [\dot{p} - \beta_u \dot{p}_0]$$

$u = \text{const}$
 $\beta_u = \frac{u}{c} = \text{const}$
 $\gamma_u = \text{const}$

$\dot{p}_0 = \frac{d}{dt} (\gamma m c) = 0$
 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
 $v = \text{const} \rightarrow \dot{\gamma} = 0$

• 2. Newtonsches Axiom

▶ klassisch: $F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mu)}{dt} \stackrel{m=\text{const}}{=} m \frac{dv}{dt} = ma$

▶ relativistisch: $F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} (\gamma m v)$

$m = \text{const}$
 $= \dot{\gamma} m v + \gamma m \dot{v}$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{\gamma^3 v}{c^2} \cdot \dot{v} \rightarrow = \frac{v^2}{c^2} \cdot \gamma^3 \cdot \dot{v} + \gamma m \dot{v}$
 $= \gamma^3 m \dot{v} \cdot \left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right)$

(Minkowski-Kraft)
 $K = \gamma F$

$F = \gamma^3 m \dot{v} = \gamma^3 m a$

NB: allgemeiner Ausdruck für relativist. Kraft \vec{F} ist komplizierter

- Energieerhaltung, kinetische Energie

► klassisch: $E_{\text{kin}} = W = \int F dx = \int m a \cdot \frac{dx}{dt} dt = \int m \frac{dv}{dt} \cdot v dt$
 $= \int m v dv = \frac{1}{2} m v^2$

► relativistisch:

$$W_x = \int F_x dx = \int \frac{dp_x}{dt} dx = \int m \gamma^3 \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} dt$$

$$= \int m \gamma^3 \frac{dv}{dt} \cdot v dt = mc^2 \int_0^{v/c} \gamma^3 \frac{v}{c} d\left(\frac{v}{c}\right) = \dots$$

$$= mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]_0^{v_x}$$

$$W = E_{\text{kin}} = mc^2 (\gamma - 1) = \underbrace{\gamma mc^2}_{\text{relativistische Energie Erel.}} - \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}}$$

$$E_{\text{rel}} := \gamma mc^2 = p_0 c$$

► Übergang zu nicht-relativist. Fall: $v \ll c$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \dots$$

(Taylor-Reihenentwicklung)

$$E_{\text{kin}} = mc^2 \left(\underbrace{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \dots}_{=\gamma} - 1 \right) = \frac{1}{2} m v^2 + \dots$$

• relativistischer Energiesatz

Betrachte: $\left(\frac{E}{c}\right)^2 - (\vec{p})^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$
 (NB: $E \equiv E_{\text{rel}}$)

$$= (\gamma mc)^2 - (\gamma m v_x)^2 - (\gamma m v_y)^2 - (\gamma m v_z)^2$$

$$= \gamma^2 m^2 c^2 \left[1 - \left(\frac{v_x}{c}\right)^2 - \left(\frac{v_y}{c}\right)^2 - \left(\frac{v_z}{c}\right)^2 \right]$$

$$= \gamma^2 m^2 c^2 \left[1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2} \right]$$

$= \frac{1}{\gamma^2}$

→ $\boxed{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - (\vec{p})^2 = m^2 c^2}$ = const in allen Inertialsystemen, d.h. lorentz-invariant

→ Masse m (bzw. $m^2 c^2$) ist lorentz-invariante Größe

→ nützliche Relation ($E = E_{\text{rel}}$)

▶ $\gamma = \frac{E}{m c^2}$

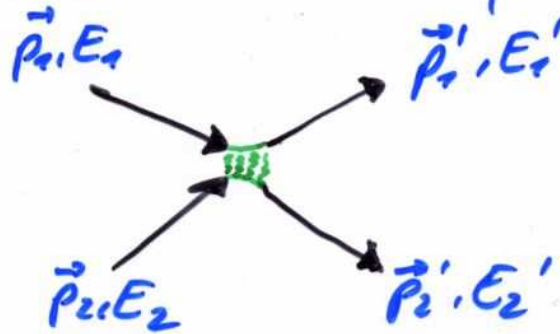
▶ $\beta = \frac{pc}{E}$

▶ $\gamma \beta = \frac{p}{m c}$

7.7 Anwendung relativist. Dynamik

z.B. Stöße zwischen Teilchen mit relativist. Energien

- Wie bei nicht-relativist. Stößen gilt:



► Impulssatz: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$
 $m_1 \gamma_1 \vec{v}_1 + m_2 \gamma_2 \vec{v}_2 = m_1 \gamma_1' \vec{v}_1' + m_2 \gamma_2' \vec{v}_2'$

► Energiesatz: $E_1 + E_2 = E_1' + E_2'$
(elastische Stöße)
 $\gamma_1 m_1 c^2 + \gamma_2 m_2 c^2 = \gamma_1' m_1 c^2 + \gamma_2' m_2 c^2$

sind beides wesentliche Arbeitswerkzeuge
zur Behandlung relativistischer Stöße!

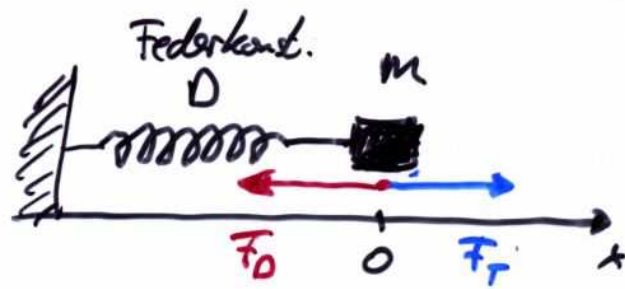
8 Schwingungen und Wellen

... haben herausragende Bedeutung -
in Physik und Technik!

- Physik: z.B. ▶ Wellenausbreitung in Materie
↔ Mikrostruktur der Materie
 - ▶ Quantenmechanik:
Teilchen als Welle
Wellen als Teilchen
- Technik: z.B. ▶ Resonanz bei Schwingungen
↔ Festigkeit von Maschinen, Gebäuden, ...
 - ▶ Wellen ↔ Schall, Radio, Telefon, Licht, ...

8.1 Harmonische Schwingungen

● Beispiel: Federpendel



$T_{10} = 6.2 \text{ s}$ für 10 Schwingungen bei $m = 30 \text{ g}$
 $T_{10} = 8.6 \text{ s}$ für 10 " " " bei $m = 60 \text{ g}$
 $T_{10} = 7.3 \text{ s}$ für 10 " " " bei $m = 40 \text{ g}$

} $T \sim \sqrt{m}$

▶ Trägheitskraft $F_T = m \ddot{x}$

▶ Rückstellkraft $F_0 = -Dx$

→ 3. Newtonsches Axiom (besser: d'Alembertsches Prinzip): $F_T = F_0$

→ $m \ddot{x} = -Dx$

→ $\ddot{x} + \frac{D}{m}x = 0$ Schwingungs-
differential-
gleichung (DGL)

Lösung: harmonische Schwingungen

↔ Rückstellkraft
linear (in x)

▶ Ansatz:

$x_A(t) = A \cos \omega_0 t$
Amplitude

Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi f_0$

$\dot{x}_A(t) = -A\omega_0 \sin \omega_0 t$

Frequenz
 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$\ddot{x}_A(t) = -A\omega_0^2 \cos \omega_0 t$

→ $\ddot{x}_A + \frac{D}{m}x_A = -A\omega_0^2 \cos \omega_0 t + \frac{D}{m} \cdot A \cos \omega_0 t \stackrel{!}{=} 0$

→ $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ → $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ = $\frac{2\pi}{T}$

Auch $x_B(t) = B \cdot \sin \omega_0 t$ wäre Lösung

allg. Lösung: \blacktriangleright Überlagerung von $x_A(t)$ und $x_B(t)$

$$x(t) = x_A(t) + x_B(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

\blacktriangleright Rand- / Startbedingungen

Ort: $x(t=0) = A \stackrel{!}{=} x_0$

Geschw.: $\dot{x}(t=0) = -A\omega_0 \sin \omega_0 t + B\omega_0 \cos \omega_0 t$
 $= B\omega_0 \stackrel{!}{=} v_0$

$$\rightarrow A = x_0, \quad B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

\blacktriangleright math. äquivalente Lösung:

$$x(t) = \underbrace{C}_{\text{Amplitude}} \cdot \cos(\omega_0 t - \underbrace{\varphi}_{\text{Phase}})$$

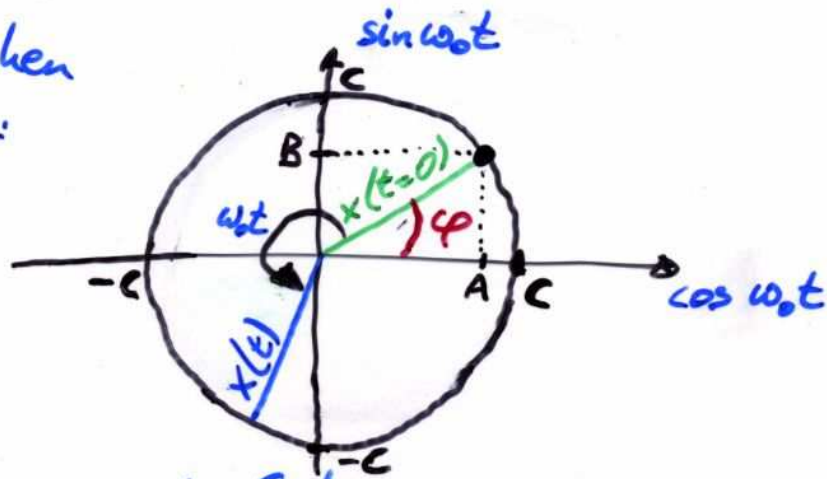
$$x(t) = C \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi) = \underbrace{C \cdot \cos \varphi}_{A} \cdot \cos \omega_0 t + \underbrace{C \cdot \sin \varphi}_{B} \cdot \sin \omega_0 t$$
$$= A \cdot \cos \omega_0 t + B \cdot \sin \omega_0 t$$

$$\rightarrow \frac{B}{A} = \frac{C \cdot \sin \varphi}{C \cdot \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi$$

$$\rightarrow A^2 + B^2 = C^2 \cos^2 \varphi + C^2 \sin^2 \varphi = C^2 (\underbrace{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}_{=1})$$

$$\hookrightarrow \sqrt{A^2 + B^2} = C$$

- Relation zwischen den Lösungen:



harmonische Schwingung

↔ gleichförmige Kreisbewegung

- Elegante (ste) Lösung der Schwingungs-DGL:

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

Lösungsansatz z : $z(t) = z_0 \cdot e^{\lambda t}$

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = z_0 \lambda \cdot e^{\lambda t} \\ \ddot{z}(t) = z_0 \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} \end{cases}$$

$$\text{in } \ddot{z} + \omega_0^2 z = z_0 \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 \cdot z_0 e^{\lambda t} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \text{charakterist. Polynom der DGL}$$

$$\rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\omega_0^2} = \pm \omega_0 \sqrt{-1} = \pm \omega_0 \cdot i$$

$$\rightarrow z(t) = z_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + z_2 \cdot e^{\lambda_2 t} = z_1 e^{i\omega_0 t} + z_2 e^{-i\omega_0 t} \quad (i := \sqrt{-1})$$

Euler-Formel:

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$$

mit Euler-Formel folgt:

$$\begin{aligned} z(t) &= z_1 \cdot (\cos \omega_0 t + i \cdot \sin \omega_0 t) \\ &\quad + z_2 \cdot (\cos \omega_0 t - i \cdot \sin \omega_0 t) \\ &= \underbrace{(z_1 + z_2)} \cos \omega_0 t + i \cdot \underbrace{(z_1 - z_2)} \sin \omega_0 t \\ &= A \cdot \cos \omega_0 t + B \cdot \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

d.h. $\begin{cases} A = z_1 + z_2 \\ B = i(z_1 - z_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}(A - i \cdot B) \\ z_2 = \frac{1}{2}(A + i \cdot B) \end{cases}$

Beispiel: Fadenpendel

(hier Betrachtung mit Drehmomenten)

Rückstelldrehmoment:

$$M_r = l \cdot F_T \\ = -l \cdot mg \sin \Phi$$

Trägheitsdrehmoment:

$$M_T = l \cdot F_T = l \cdot m \ddot{x} = l^2 m \ddot{\Phi}$$

$$x = l \cdot \Phi \rightarrow \ddot{x} = l \ddot{\Phi}$$

$$\rightarrow M_T = M_r$$

$$l \cdot m \cdot \ddot{\Phi} = -mg l \sin \Phi$$

$$\ddot{\Phi} = -\frac{g}{l} \cdot \sin \Phi$$

Allg.: nicht-linear in Rückstellkraft
→ keine harmonische Schwingungen

Kleinwinkel-Näherung: $\sin \Phi = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d^j \sin \Phi}{d\Phi^j} \Big|_{\Phi=0} \cdot \frac{\Phi^j}{j!}$
(Taylor-Reihenentwicklung)

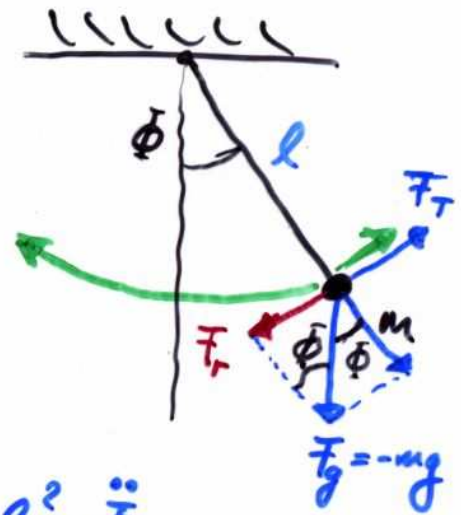
$$\rightarrow \sin \Phi = \Phi - \frac{\Phi^3}{3!} + \frac{\Phi^5}{5!} - \dots$$

→ Fadenpendel mit $\sin \Phi \approx \Phi$:

$$\ddot{\Phi} + \frac{g}{l} \Phi = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

NB: ω_0 unabhängig von m !
 ω_0 skaliert mit $1/\sqrt{l}$



8.2 Gedämpfte Schwingungen

Reibung \rightarrow Dämpfung der Schwingung

Reibungskraft, z.B.:

$$F_R = -b \cdot v = -b \dot{x}$$

Rückstellkraft

$$F_0 = -Dx$$

Trägheitskraft

$$F_T = m \ddot{x}$$

$$\rightarrow F_T = F_0 + F_R$$

$$m \ddot{x} = -Dx - b \dot{x}$$

$$\rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{D}{m} x = 0$$

$$\rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$2\gamma := \frac{b}{m}$$
$$\omega_0^2 = \frac{D}{m}$$

Lösungsansatz: $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$

$$\dot{x} = \lambda x_0 e^{\lambda t} = \lambda x$$

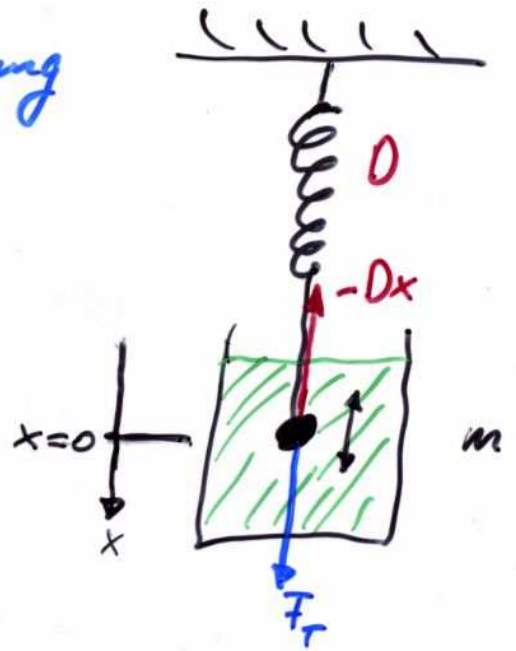
$$\ddot{x} = \lambda^2 x_0 e^{\lambda t} = \lambda^2 x$$

$$\rightarrow \lambda^2 + 2\gamma \cdot \lambda + \omega_0^2 = 0$$

charakterist.
Polynom

$$\rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} \cdot \left[x_A \cdot e^{+\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t} + x_B \cdot e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t} \right]$$



Fallunterscheidung:

- Schwache Dämpfung \rightarrow Schwingfall

$$\gamma \ll \omega_0 \rightarrow \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}_{=: \omega \leq \omega_0} \cdot i =: \omega \cdot i$$

$$\rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} \cdot \left[x_A e^{i\omega t} + x_B \cdot e^{-i\omega t} \right]$$

$$= \dots = e^{-\gamma t} \cdot \left[A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t \right]$$

$$x(t) = e^{-\gamma t} \cdot C \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$
$$\tan \varphi = -\frac{B}{A}$$

Charakterisierung der Dämpfung:

- ▶ Logarithmisches Dekrement

$$\delta := \gamma \cdot T = \ln \left(\frac{x(t)}{x(t+T)} \right)$$

- ▶ Güte (v.a. erzwungene Schwingungen \rightarrow folgt noch)

$$Q := \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

- starke Dämpfung \rightarrow Kriechfall

$\gamma \gg \omega_0$; Mit $d := \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \geq 0$

$$\rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} \cdot [x_A \cdot e^{dt} + x_B \cdot e^{-dt}]$$

$$= e^{-\gamma t} \cdot \left[\underbrace{(x_A + x_B)}_A \cdot \underbrace{\frac{e^{dt} + e^{-dt}}{2}}_{\cosh dt} + \underbrace{(x_A - x_B)}_B \cdot \underbrace{\frac{e^{dt} - e^{-dt}}{2}}_{\sinh dt} \right]$$

$$\rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} \cdot [A \cdot \cosh dt + B \cdot \sinh dt]$$

Charakteristikum:

- ▶ kriecht langsam Gleichgewichtslage entgegen

- $\gamma = \omega_0 \rightarrow$ aperiodischer Grenzfall

Spezialfall entartet - Lösungen des charakt. Polynoms:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$$

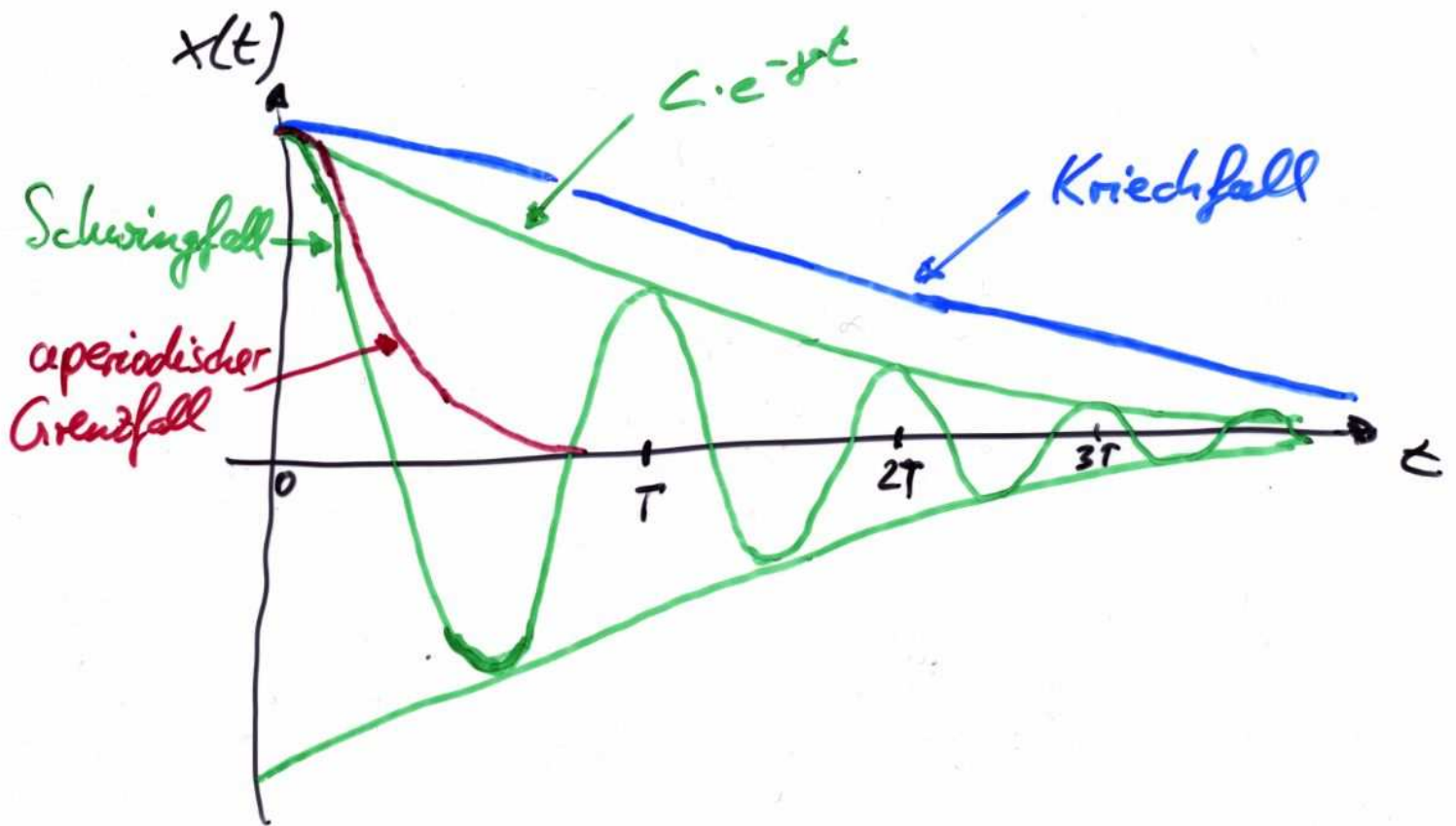
- DGL kann durch $x(t) = x_0 e^{-\gamma t}$ und auch durch

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = c \cdot x_0 \cdot t e^{-\gamma t}$$

gelöst werden.

↳ allg. Lösung: $x(t) = x_0 (1 + ct) \cdot e^{-\gamma t}$

- Charakteristika:
- schwingt gerade eben nicht
 - schnellste Annäherung an Gleichgewichtslage



- (kurze) Energiebetrachtung bei Schwingungen

- ▶ ungedämpfte Schwingungen: $x(t) = C \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$
 $\dot{x}(t) = -C \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

- ▶ $E_{\text{kin}}(t) = \frac{1}{2} m v(t)^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2$
 $= \frac{1}{2} m \omega_0^2 C^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

- ▶ $E_{\text{pot}}(t) = \int_{x(t)}^0 F_0 dx' = -D \int_{x(t)}^0 x' dx' = \frac{1}{2} D x(t)^2$
 $x(t) \uparrow = -Dx$ $x(t)$ $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$
 $= \frac{1}{2} m \omega_0^2 C^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

- $E(t) = E_{\text{kin}}(t) + E_{\text{pot}}(t)$
 $= \frac{1}{2} m \omega_0^2 C^2 \cdot \underbrace{(\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi))}_{=1}$

- $E(t) = E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 C^2 = \text{const}$

▶ mittlere kinetische Energie

$$\overline{E_{kin}} = \frac{1}{T} \int_0^T E_{kin}(t) dt = \underbrace{\frac{1}{2} m \omega_0^2 C^2}_{= E_{ges}} \cdot \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega_0 t + \varphi) dt}_{= \frac{1}{2} \text{ für } T = \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

$$\overline{E_{kin}} = \frac{1}{2} E_{ges}$$

▶ mittlere potentielle Energie

$$\begin{aligned} \overline{E_{pot}} &= \frac{1}{T} \int_0^T E_{pot}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T (E_{ges} - E_{kin}(t)) dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot E_{ges} \cdot T - \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T E_{kin}(t) dt}_{= \frac{1}{2} E_{ges}} = \frac{1}{2} E_{ges} \end{aligned}$$

$$\overline{E_{pot}} = \frac{1}{2} E_{ges}$$

▶ gedämpfte Schwingungen

$$\begin{aligned} & m \ddot{x} + D x = -b \dot{x} \\ \cdot \dot{x} \rightarrow & m \dot{x} \dot{x} + D x \dot{x} = \frac{d}{dt} \left[\underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2}_{E_{kin}(t)} + \underbrace{\frac{1}{2} D x^2}_{E_{pot}(t)} \right] = -b \dot{x}^2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} [E_{kin}(t) + E_{pot}(t)] = -b \dot{x}^2 \leq 0$$

→ $E_{kin}(t) + E_{pot}(t)$ nimmt ab!

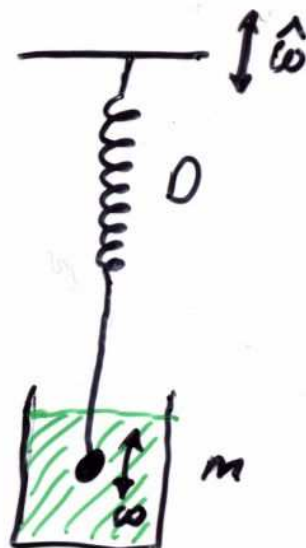
8.3 Erzwungene Schwingungen

Trägheitskraft $F_T = m \ddot{x}$

Rückstellkraft $F_D = -Dx$

Reibungskraft $F_R = -b\dot{x}$

Anregungskraft $F_A = F_0 \cos \hat{\omega} t$



→ $F_T = F_D + F_R + F_A$

→ $\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \hat{\omega} t$

(Typ: inhomogene DGL)

mit $2\gamma := \frac{b}{m}$
 $\omega_0^2 := \frac{D}{m}$

- Lösung einer inhomogenen (linear) DGL:
= (1) allg. Lösung der homogenen DGL
+ (2) partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

Lösung mit komplexwertigen Ansatz:

$$\ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\hat{\omega} t}$$

zu (1) homogene DGL: $\ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$

Lösung: entspricht gedämpfter Schwingung ^(s.8.2) ✓

zu (2) partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

z.B. für stationären Zustand

$$\rightarrow \text{Ansatz } z(t) = A \cdot e^{i(\hat{\omega}t + \varphi)} = A \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\hat{\omega}t}$$

$$\hookrightarrow \dot{z}(t) = i\hat{\omega} \cdot A e^{i(\hat{\omega}t + \varphi)} = i\hat{\omega} \cdot z(t)$$

$$\ddot{z}(t) = \dots = -\hat{\omega}^2 \cdot z(t)$$

Eingesetzt in inhomogene DGL

$$-\hat{\omega}^2 \cdot z(t) + 2\gamma \cdot i\hat{\omega} z(t) + \omega_0^2 z(t) = \frac{F_0}{m} e^{i\hat{\omega}t}$$

$$\rightarrow (-\hat{\omega}^2 + 2i\gamma\hat{\omega} + \omega_0^2) \cdot A e^{i\varphi} \cdot e^{i\hat{\omega}t} = \frac{F_0}{m} e^{i\hat{\omega}t}$$

$$\rightarrow (\omega_0^2 - \hat{\omega}^2 + 2i\gamma\hat{\omega}) \cdot A e^{i\varphi} = \frac{F_0}{m}$$

Euler-Gleichung $\rightarrow A \cos\varphi + iA \sin\varphi = A e^{i\varphi} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \hat{\omega}^2 + 2i\gamma\hat{\omega}}$

$$A = |A e^{i\varphi}| = \sqrt{(A e^{i\varphi}) \cdot (A e^{i\varphi})^*} = \dots = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2)^2 + 4\gamma^2 \hat{\omega}^2}}$$

$$= \sqrt{[\operatorname{Re}(A e^{i\varphi})]^2 + [\operatorname{Im}(A e^{i\varphi})]^2}$$

d.h.: $A = A(\hat{\omega})$

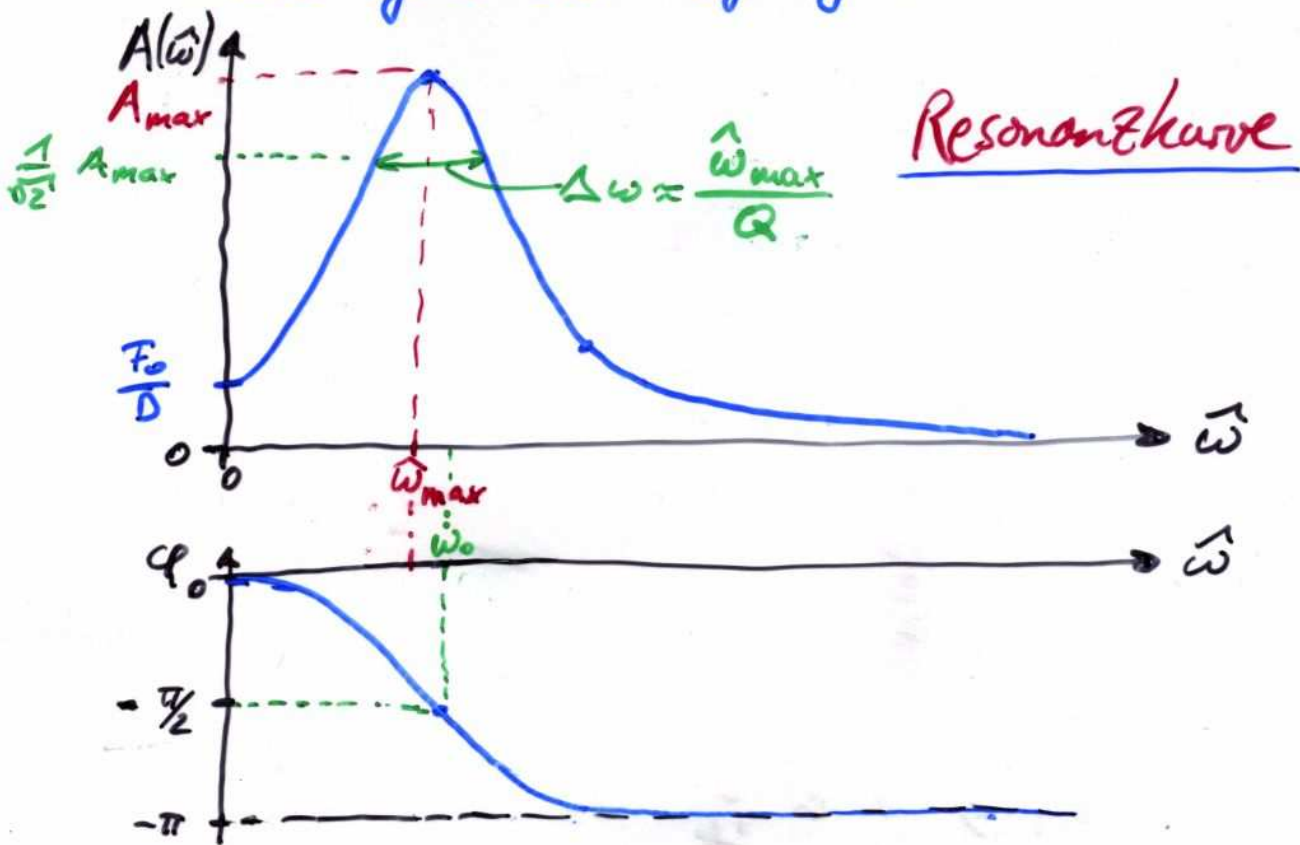
$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{A \sin\varphi}{A \cos\varphi} = \frac{\operatorname{Im}(A e^{i\varphi})}{\operatorname{Re}(A e^{i\varphi})} = \dots = -\frac{2\gamma\hat{\omega}}{\omega_0^2 - \hat{\omega}^2}$$

$$\textcircled{*} (A e^{i\varphi}) \cdot (A e^{-i\varphi}) = \left(\frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2) + 2i\gamma\hat{\omega}} \right) \cdot \left(\frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2) - 2i\gamma\hat{\omega}} \right) = \frac{(F_0/m)^2}{(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2)^2 - (2i\gamma\hat{\omega})(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2) + (2i\gamma\hat{\omega})(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2) + 4\gamma^2 \hat{\omega}^2}$$

$$= \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2)^2 + 4\gamma^2 \hat{\omega}^2}$$

$$\textcircled{**} A e^{i\varphi} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \hat{\omega}^2 + 2i\gamma\hat{\omega}} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \hat{\omega}^2 + 2i\gamma\hat{\omega}} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2) - (2i\gamma\hat{\omega})}{(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2) - (2i\gamma\hat{\omega})} = \frac{(F_0/m) \cdot (\omega_0^2 - \hat{\omega}^2)}{(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2)^2 + 4\gamma^2 \hat{\omega}^2} - i \cdot \frac{(F_0/m) \cdot (2\gamma\hat{\omega})}{(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2)^2 + 4\gamma^2 \hat{\omega}^2}$$

Charakteristika der stationären Lösung erzwungener Schwingungen



Resonanzfrequenz folgt aus Maximierung von

$$A(\hat{\omega}) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2)^2 + 4\gamma^2 \hat{\omega}^2}}$$

$$\rightarrow \hat{\omega}_{res} = \hat{\omega}_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \leq \omega = \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}_{\text{gedämpfte freie Schwingung}} \leq \underbrace{\omega_0}_{\text{unge-dämpfte Schwingung}}$$

Resonanzkreisfrequenz

- Einschwingvorgang $\hat{=}$ Überlagerung von
 - ▶ gedämpfter Schwingung (ω)
 - ▶ Schwingung des stationären Zustands ($\hat{\omega}$)

(NB: Einschwingvorgang erfordert Überlagerung von allg. Lösung der homogenen DGL + partikuläre Lösung der inhomogenen DGL)

8.4 Überlagerung von Schwingungen

Esgilt:

Superpositionsprinzip

d.h. Schwingungen
überlagern (addieren)
sich ungestört

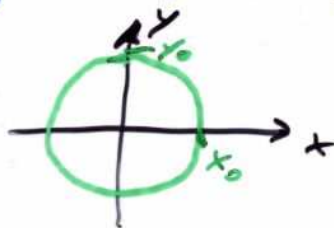
• 2 dimensionale Überlagerung

→ Lissajous-Figuren

allg.: ▶ $x(t) = x_0 \cos(\omega_x t + \varphi_x)$

▶ $y(t) = y_0 \cos(\omega_y t + \varphi_y)$

z.B.: $\omega_x = \omega_y$, $x_0 = y_0$, $\varphi_x = 0^\circ$, $\varphi_y = 90^\circ$



• 1 dimensionale Überlagerung

$$x_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \rightarrow z_1(t) = C_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)}$$

$$x_2(t) = C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \rightarrow z_2(t) = C_2 e^{i(\omega_2 t + \varphi_2)}$$

$$\rightarrow x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

= ... (Additions-
theoreme
von sin, cos)

= ...

$$\rightarrow x(t) = \operatorname{Re}(z(t))$$

$$= \operatorname{Re}(z_1(t) + z_2(t))$$

= ... (Multiplikation
von Exponential-
funktionen)

Beispiele für Überlagerung von Schwingungen:

$$\blacktriangleright \omega_1 = \omega_2 =: \omega$$

$$\begin{aligned} \boxed{z(t)} &= C_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + C_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)} \\ &= C_1 e^{i\omega t} \cdot e^{i\varphi_1} + C_2 e^{i\omega t} \cdot e^{i\varphi_2} \\ &= \underbrace{(C_1 e^{i\varphi_1} + C_2 e^{i\varphi_2})}_{C \cdot e^{i\varphi}} \cdot e^{i\omega t} \\ &= \boxed{C \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{(C \cdot e^{i\varphi}) \cdot (C \cdot e^{-i\varphi})} = \sqrt{(C_1 e^{i\varphi_1} + C_2 e^{i\varphi_2}) \cdot (C_1 e^{-i\varphi_1} + C_2 e^{-i\varphi_2})} \\ &= \dots = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_1 C_2 (e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)})} \end{aligned}$$

Euler-Formel:

$$\left. \begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos\varphi + i\sin\varphi \\ \rightarrow e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} &= 2\cos\varphi \\ e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} &= 2i\sin\varphi \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\boxed{C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}}$$

$$\tan\varphi = \frac{C \cdot \sin\varphi}{C \cdot \cos\varphi} = \frac{\operatorname{Im}(C \cdot e^{i\varphi})}{\operatorname{Re}(C \cdot e^{i\varphi})} = \frac{\operatorname{Im}(C_1 e^{i\varphi_1} + C_2 e^{i\varphi_2})}{\operatorname{Re}(C_1 e^{i\varphi_1} + C_2 e^{i\varphi_2})}$$

$$\rightarrow \boxed{\tan\varphi = \frac{C_1 \sin\varphi_1 + C_2 \sin\varphi_2}{C_1 \cos\varphi_1 + C_2 \cos\varphi_2}}$$

► $C_1 = C_2 =: C$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, aber $\omega_1 \neq \omega_2$

$$x(t) = C \cos \omega_1 t + C \cdot \cos \omega_2 t$$

$$= C \cdot \cos \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t \right]$$

$$+ C \cdot \cos \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t \right]$$

$$= \textcircled{*} =$$

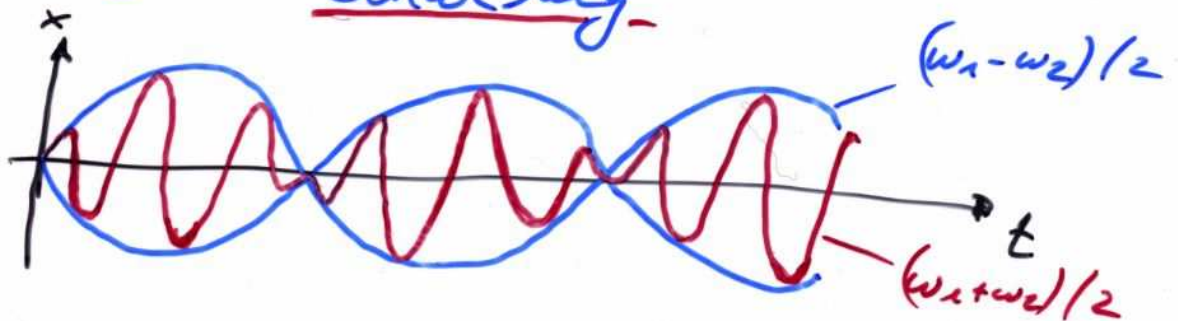
$$x(t) = 2 \cdot C \cdot \cos \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right] \cdot \cos \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right]$$

Differenz-
frequenz

Summen-
frequenz

► $\omega_1 \neq \omega_2 \rightarrow$

Schwebung



$$\textcircled{*} C \cdot \cos \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t \right] + C \cdot \cos \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t \right]$$

$$= C \cdot \left[\cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right) \cdot \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right) - \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right) \sin \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right) \right]$$

$$+ C \cdot \left[\cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right) \cdot \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right) + \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right) \cdot \sin \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right) \right]$$

$$= 2 \cdot C \cdot \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right) \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right)$$

• Fourier-Synthese, Fourier-Analyse

- komplizierte Schwingungen können durch Überlagerung harmonischer Schwingungen synthetisiert werden:

→ Fourier-Synthese

$$x(t) = x_0 + x_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + x_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cos(n \cdot \omega t + \varphi_n)$$



$$x(t) = \sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots$$

- Zerlegung komplizierter Schwingung in harmonische Schwingungen

→ Fourier-Analyse

$$z_n = a_n + i b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot [\cos(n\omega t) + i \sin(n\omega t)] dt$$

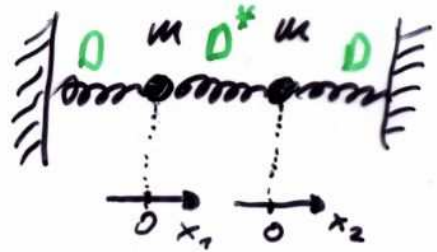
$$z_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{i n \omega t} dt \quad \text{Fourier-Analyse}$$

→ $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n \cdot e^{i n \omega t}$ Fourier-Synthese

8.5 gekoppelte Schwingungen

Trägheitskräfte:

$$F_{T1} = m \ddot{x}_1, \quad F_{T2} = m \ddot{x}_2$$



Rückstellkräfte:

$$F_{D1} = -Dx_1 - D^*x_1 + D^*x_2 = -Dx_1 + D^*(x_2 - x_1)$$

$$F_{D2} = \dots = -Dx_2 + D^*(x_1 - x_2) = -Dx_2 - D^*(x_2 - x_1)$$

$$\rightarrow \begin{cases} F_{T1} = F_{D1} \rightarrow m \ddot{x}_1 + (D+D^*)x_1 - D^*x_2 = 0 \\ F_{T2} = F_{D2} \rightarrow m \ddot{x}_2 - D^*x_1 + (D+D^*)x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \textcircled{*} \begin{pmatrix} m \ddot{x}_1 \\ m \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (D+D^*) & -D^* \\ -D^* & (D+D^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gekoppeltes lineares DGL-System

komplexwertiger Lösungsansatz: ω ist zu bestimmen

$$x_1(t) = X_1 e^{i\omega t}, \quad x_2(t) = X_2 e^{i\omega t}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{einsetzen in } \textcircled{*} \\ e^{i\omega t} \text{ kürzen} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} -\omega^2 m X_1 + (D+D^*)X_1 - D^*X_2 = 0 \\ -\omega^2 m X_2 - D^*X_1 + (D+D^*)X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -\omega^2 m + (D+D^*) & -D^* \\ -D^* & -\omega^2 m + (D+D^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

homogenes lineares Gleichungssystem
für Amplituden X_1 und X_2

Lösung für beliebige X_1 und X_2

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} -m\omega^2 + D + D^* & -D^* \\ -D^* & -m\omega^2 + D + D^* \end{pmatrix} = 0$$

(Determinante der Matrix)

$$\Leftrightarrow (-m\omega^2 + D + D^*)^2 - (-D^*)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -m\omega^2 + D + D^* = \pm D^*$$

$$\uparrow \quad \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{D+2D^*}{m}}}$$

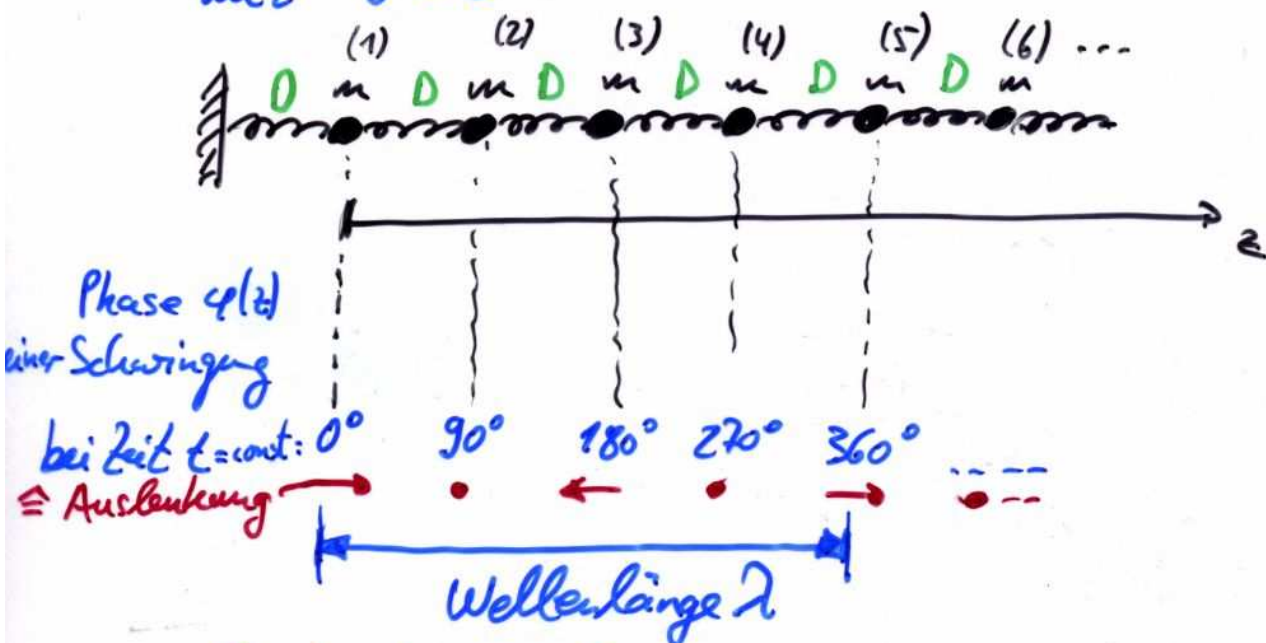
Eigenfrequenzen des gekoppelten Schwingungs-
systems

ω_1 :  (D^* trägt nicht bei)

ω_2 :  (D^* trägt maximal bei)

8.6 Wellen

Betrachte gekoppelte (äquidistante) Oszillatoren mit $D = D^*$



- Beobachtung: Schwingung von (1) breitet sich auf (2) aus
— " — von (2) — " — " — (3) aus
...

d.h. Energietransport von (1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow ...

- Schwingungsbestand eines einzelnen Oszillators hängt von Zeit t und dem Ort z ab:

$$\boxed{\varphi(z, t) = A \cos(\omega t - k z)}$$

ortsabh. Phase $\varphi(z)$

$$\varphi(z, t) = C \cdot e^{i(\omega t - k z)}$$

$\varphi(z, t)$ beschreibt eine Welle

Welle: in Raum und Zeit periodische Ausbreitung eines Schwingungs- Zustands mit Energietransport, ohne Massentransport

$k := \frac{2\pi}{\lambda}$ Wellenzahl, i.A. ein Vektor in Ausbreitungsrichtung der Welle

λ : Wellenlänge

8.1 Harmonische Wellen (vgl. 8.1)

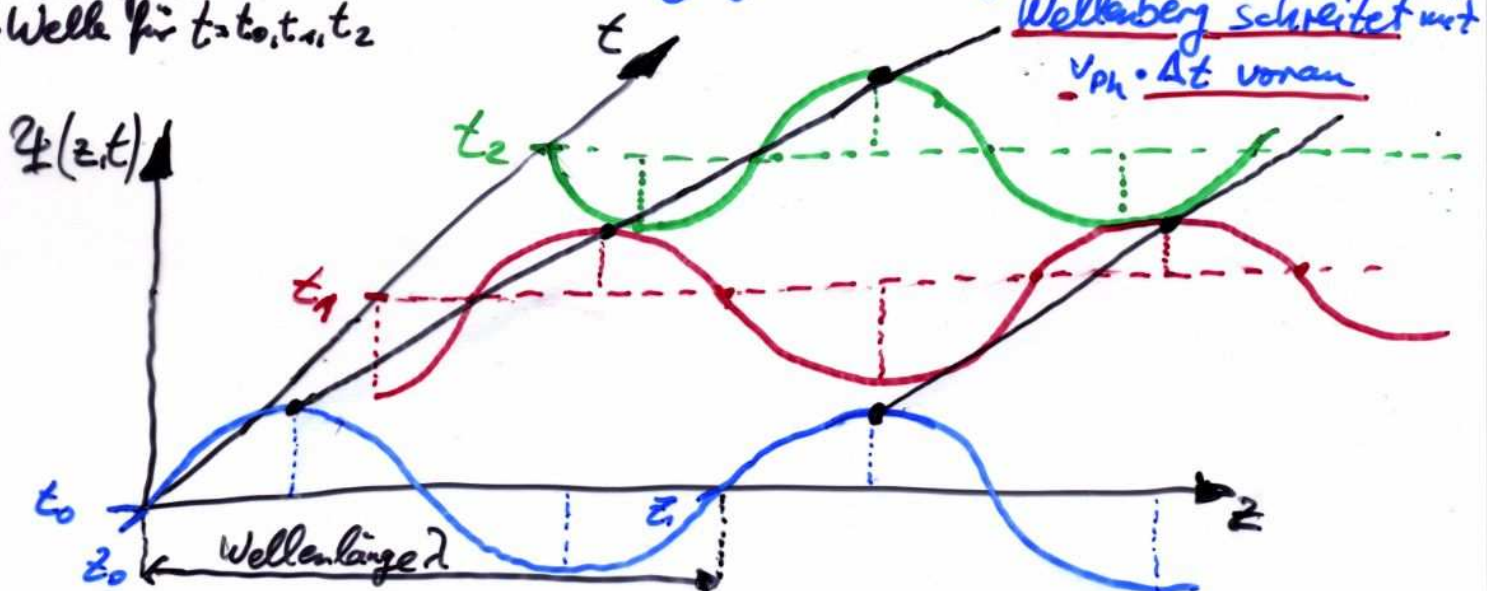
$$\psi(z, t) = A \cdot \cos(\omega t - kz) = A \cdot \cos\left[\omega \cdot \left(t - \frac{k}{\omega} \cdot z\right)\right]$$

→ $\frac{\omega}{k}$ entspricht einer Geschwindigkeit.

Phasengeschwindigkeit $v_{ph} := \frac{\omega}{k} = f \cdot \lambda$

≅ Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle

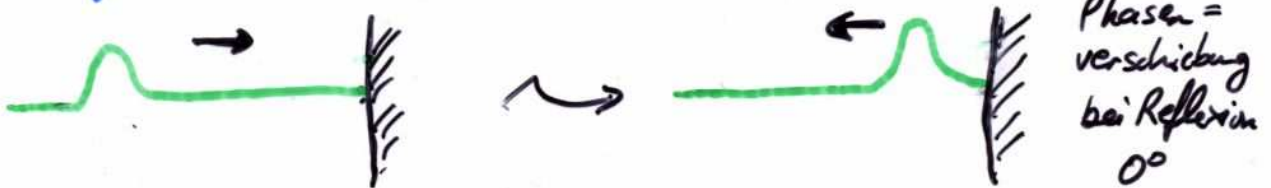
Momentaufnahmen der Welle für t_0, t_1, t_2



Reflexion; stehende Welle

- Wellen werden reflektiert, je nachdem wie die Wellenkette abgeschlossen ist:

- ▶ offenes oder freies Ende



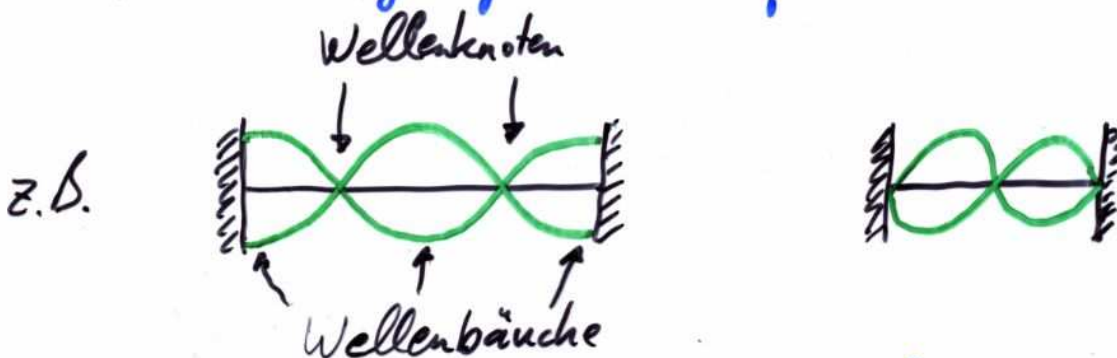
- ▶ geschlossenes oder festes Ende



- ▶ geeignet gedämpfter Abschluss



- Hinlaufende und reflektierte Welle überlagern bei geeigneter Frequenz zu stehender Welle



Wellenknoten und -bäuche ortsfest!

8.6.2 Wellengleichung (d'Alembert Gleichung)

$$\psi(z, t) = A \cdot \cos(\omega t - kz)$$

- Welle $\hat{=}$ Schwingung in Zeitkoordinate $t \rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \omega^2 \psi = 0$
- Welle $\hat{=}$ — " — in Ortskoordinate $z \rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0$

$$\rightarrow \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\psi = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1}{v_{ph}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}} \quad \text{Wellengleichung}$$

NB:

$$\left(\frac{\partial^2}{v_{ph}^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = 0 \rightarrow \square^2 \psi = 0$$

$=: \square^2$ d'Alembert Operator

$$\text{allg.: } \square^2 := \frac{\partial^2}{v^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

8.6.3 Wellentypen

• Ebene Wellen

z.B. $\vec{k} = k\vec{e}_z$

$$\psi(\vec{r}, t) = A \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = A \cdot \cos(\omega t - kz)$$

- Ausbreitungsrichtung in \vec{r} -Richtung



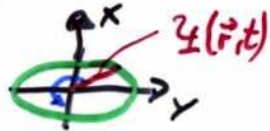
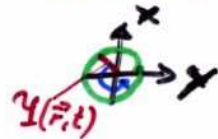
- Auslenkung der Welle (Elongation):

- Longitudinale Wellen " $\psi \parallel z$ "
(z.B. Schallwellen)

- transversale Welle " $\psi \perp z$ "

transversale polarisierte Wellen

- lineare Polarisation $\psi \parallel x$ oder $\psi \parallel y$
- zirkulare — — —
- elliptische — — —



• Kugelwellen (auch: Elementarwellen)

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr) \text{ mit } r = |\vec{r}|$$



wg. Energieerhaltung

(Im Abstand r von Quelle ist Gesamtenergie auf Kugeloberfläche $4\pi r^2$ verteilt
 \rightarrow Intensität der Welle $\hat{=} \text{Energie} \sim \left(\frac{A}{r}\right)^2 \rightarrow 4\pi r^2 \cdot \left(\frac{A}{r}\right)^2 = \text{const.}$)

Beispiele für Wellen in Medien

Es gilt immer: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v_{ph}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$


- elastische Longitudinalwelle (in festen Körpern)

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad ; \quad E: \text{Elastizitätsmodul} \quad \leftarrow \text{Diagramm einer Longitudinalwelle}$$
$$\rho = \frac{m}{V} : \text{Dichte}$$

- Transversalwelle einer Saite

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

F : mech. Spannung bzw. Spannkraft der Saite
 $\mu = \frac{m}{L}$: lineare Massendichte



- Schallwellen in Gasen

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{\rho \cdot \kappa}{\rho}}$$

ρ : Gasdruck
 ρ : Dichte
 κ : Adiabatenkoeffizient ($\kappa = 1.4$ für Luft)

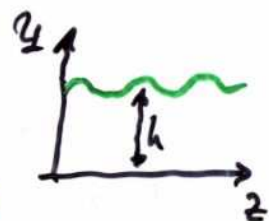
- Wasserwellen (Oberflächenwellen)

$$v_{ph} = \sqrt{\left(\frac{g \cdot \lambda}{2\pi} + \frac{2\pi \cdot \sigma}{\rho \cdot \lambda} \right) \cdot \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho} \right) \cdot \tanh(kh)}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

h : Wassertiefe, σ : Oberflächenspannung



NB: $v_{ph} = v_{ph}(\lambda) = v_{ph}(k) \rightarrow$ Dispersion

Näherungen:

► untiefe Flüssigkeiten (Flachwasserwellen)

$$v_{ph} = \sqrt{g \cdot h} \quad \text{für } h \ll \lambda, \text{ keine Dispersion}$$

► tiefe Flüssigkeiten

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{g \lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad \text{für } h \gg \lambda, \text{ normale Dispersion}$$

($v_{ph} \sim \sqrt{\lambda}$)

► Kapillarwellen

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}} = \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho}} \quad \text{für } \lambda \ll h \text{ und } \lambda \ll \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$$

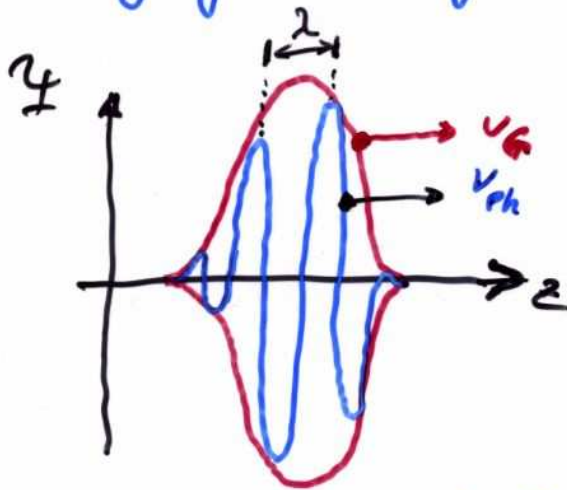
anomale Dispersion
($v_{ph} \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$)

8.6.4 Dispersion, Gruppengeschwindigkeit

Falls Phasengeschwindigkeit v_{ph} von Wellenlänge abhängig \rightarrow **Dispersion**

und
$$v_{ph} = v_{ph}(\lambda) = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega \cdot \lambda}{2\pi}$$
 Dispersionsrelation

Dispersion hat insbesondere Auswirkungen auf Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellengruppen



(= impulsartige lokale Störung)

Wellengruppe: Überlagerung unendlich vieler harmonischer Wellen mit Frequenzen

$$\omega_m - \frac{\Delta\omega}{2} < \omega < \omega_m + \frac{\Delta\omega}{2}$$

ω_m : Mittelfrequenz

$\Delta\omega$: Frequenzintervallbreite
 \rightarrow kontinuierliche Fouriertransf.

Wellengruppe (d.h. Einhüllende) breitet sich mit Gruppengeschwindigkeit
$$v_G = \frac{d\omega}{dk}$$
 aus!

Mit $v_{ph} = \frac{\omega}{k} \rightarrow v_G = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(v_{ph} \cdot k)}{dk}$

$$v_G = v_{ph} + k \cdot \frac{dv_{ph}}{dk} = v_{ph} - \lambda \frac{dv_{ph}}{d\lambda}$$

▶ $\frac{dv_{ph}}{d\lambda} = 0 \rightarrow$ keine Dispersion

▶ $v_G < v_{ph} \rightarrow$ normale Dispersion

▶ $v_G > v_{ph} \rightarrow$ anomale Dispersion

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

8.6.5 Interferenz, Kohärenz

- Linearität der Wellengleichung

■ Superpositionsprinzip

Wellen überlagern sich, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen. Die resultierende Amplitude $A(\vec{r}, t)$ am Ort \vec{r} und Zeit t ist die Summe der Einzelschwingungen $A_i(\vec{r}, t)$ gegeben:

$$A(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N A_i(\vec{r}, t)$$

- (räumliche) Kohärenz: sich überlagernde Wellen haben eine zeitlich konstante Phasendifferenz $\delta\varphi(\vec{r})$
→ Wellen haben gleiche Frequenz

- Interferenz: Überlagerung kohärenter Wellen führt zu Verstärkung (konstruktive Interferenz) und Auslöschung (destruktive — " —) in bestimmten Raumbereichen der Überlagerung
→ Interferenzbilder

NB: stehende Welle ist Spezialfall der Interferenz

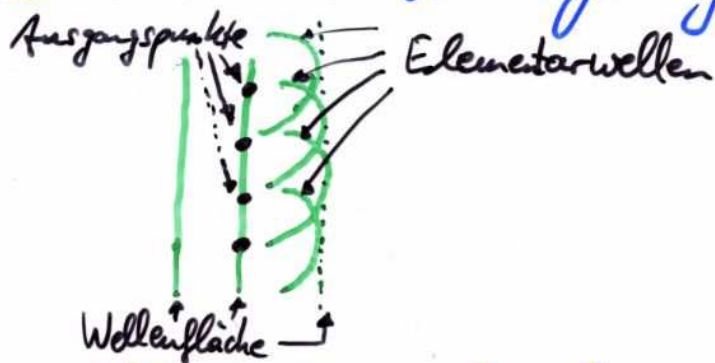
8.6.6 Huygenssches Prinzip, Beugung

Huygenssches Prinzip

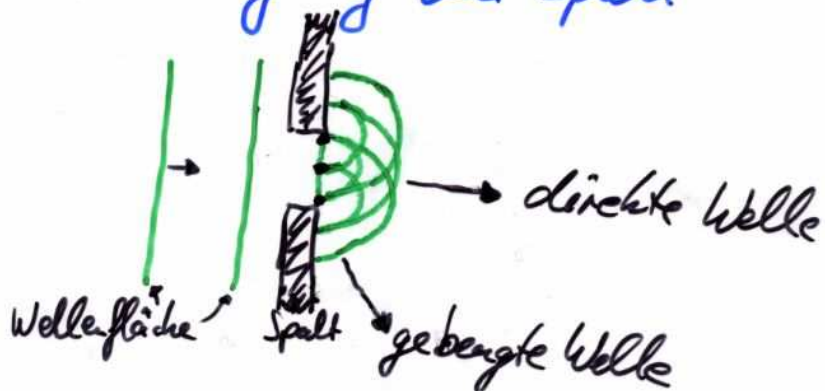
Jeder Punkt einer Wellenfläche ist

Ausgangspunkt einer Elementarwellen

Gesamtwellen = Überlagerung aller dieser Wellen

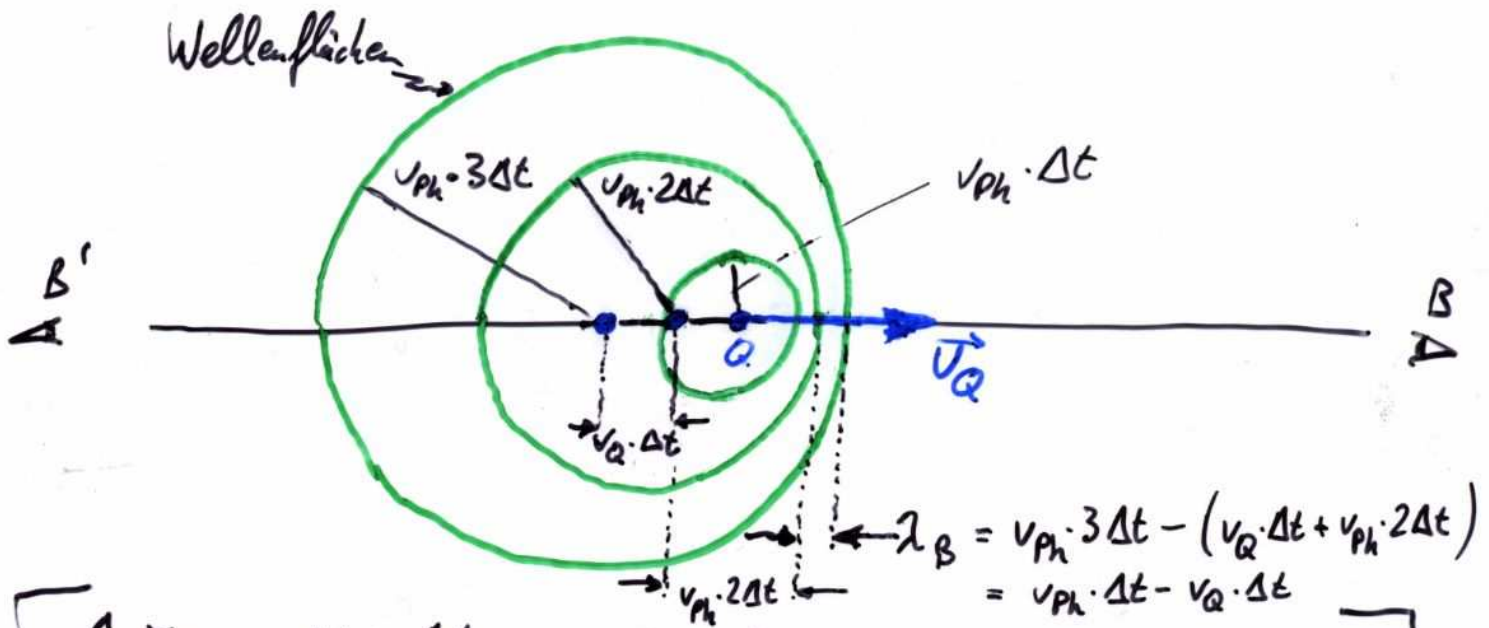


→ Phänomen der Beugung von Wellen
z.B. Beugung am Spalt



8.6.7 Doppler-Effekt

Messbare Frequenz einer Welle hängt von Relativitätsgeschwindigkeit Quelle - Empfänger ab



$$\Delta x_Q = v_Q \cdot \Delta t \quad \rightarrow \quad \lambda_B = v_{ph} \cdot \Delta t - v_Q \cdot \Delta t$$

$$\text{mit } \Delta t = T = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{v_{ph}} \quad \rightarrow \quad \lambda_B = \lambda - \frac{v_Q}{c} \cdot \lambda = \lambda \left(1 - \frac{v_Q}{c}\right)$$

für $\lambda_{B'}$ Überlegung und Rechnung analog

► Quelle Q in Ruhe: Wellenlänge λ , Frequenz $f = \frac{v_{ph}}{\lambda}$

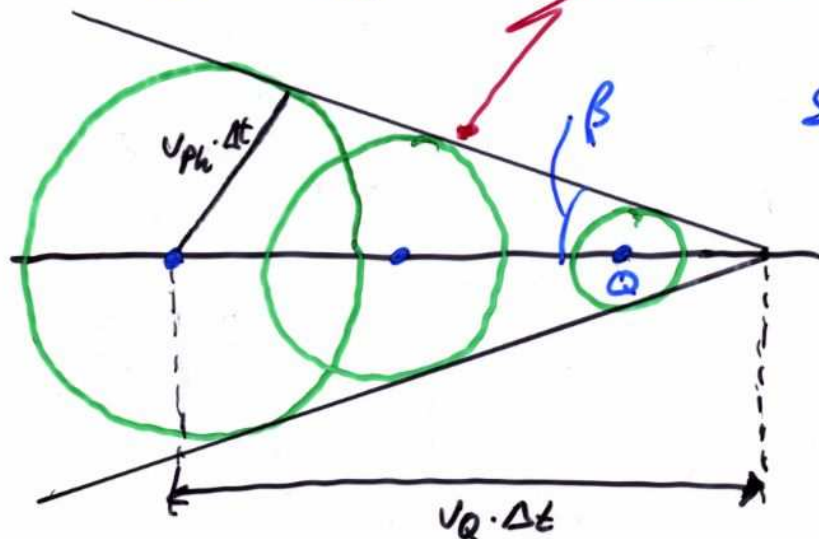
► Beobachter B: $\lambda_B = \lambda \cdot \left(1 - \frac{v_Q}{v_{ph}}\right) < \lambda$

$$f_B = \frac{f}{1 - \frac{v_Q}{v_{ph}}} > f$$

► Beobachter B': $\lambda_{B'} = \lambda \cdot \left(1 + \frac{v_Q}{v_{ph}}\right) > \lambda$

$$f_{B'} = \frac{f}{1 + \frac{v_Q}{v_{ph}}} < f$$

Falls $v_Q > v_{Ph}$ → Machsche Kegel mit Stoßfront



$$\sin \beta = \frac{v_{Ph} \cdot \Delta t}{v_Q \cdot \Delta t} = \frac{v_{Ph}}{v_Q} =: \frac{1}{M}$$

M: Machzahl

8.6.8 Energiedichte einer Welle; Intensität

vgl. Energiebetrachtung zu Schwingungen!

ein Oszillator: $E_{ges} = \frac{1}{2} m \omega^2 \cdot A^2$

viele Oszillator: $E_{ges} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot V \cdot \omega^2 A^2$

($\rho := \frac{\sum m_i}{V}$)

→ Energiedichte

$$s_E := \frac{E_{ges}}{V} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$$

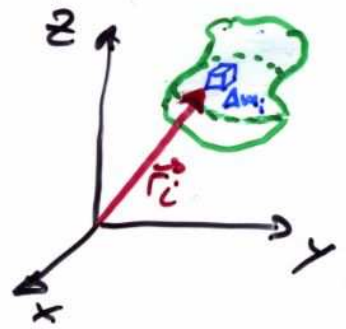
Intensität (Energieflussdichte): Energie pro Zeiteinheit durch Fläche \perp Ausbreitung

$$I := v_{Ph} \cdot s_E = \frac{1}{2} v_{Ph} \cdot \rho A^2 \omega^2$$

NB: Interferenz: Nach Addition der Amplituden quadrieren für Intensität (→ "gemischte Terme" wie in binomischen Formeln)

9 Kinematik und Dynamik starrer Körper

- Modell eines starren Körpers aufgebaut aus infinitesimalen Massenpunkten:



$$\sum_i \dots \Delta m_i \rightarrow \int \dots dm$$

⇒ Starrer Körper ≙ Verallgemeinerung eines Systems von Massenpunkten

► zusätzlich: Dichte (der Massenpunkte) $\rho := \frac{dm}{dV} \stackrel{\text{homogener Körper}}{=} \frac{M}{V}$

↳ Masse: $M = \int dm = \int \rho dV \stackrel{\text{homogener Körper}}{=} \rho \cdot V$

- Physikalische Größen verallgemeinert aus Massenpunkt = system.

► (Massen) Schwerpunkt: $\vec{r}_S = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \cdot \int \vec{r} \cdot \rho dV$

► Bewegung: Schwerpunktbeziehung + Bewegung relativ zu Schwerpunkt

Ortsvektor bzgl. Schwerpt. \vec{r}_{is} = Ortsvektor \vec{r}_i - Schwerpunktsvektor \vec{r}_s

↳ $\vec{v}_{is} = \vec{v}_i - \vec{v}_s$ mit $\vec{v}_{is} \perp \vec{r}_{is}$ → Drehbewegung um Schwerpunkt

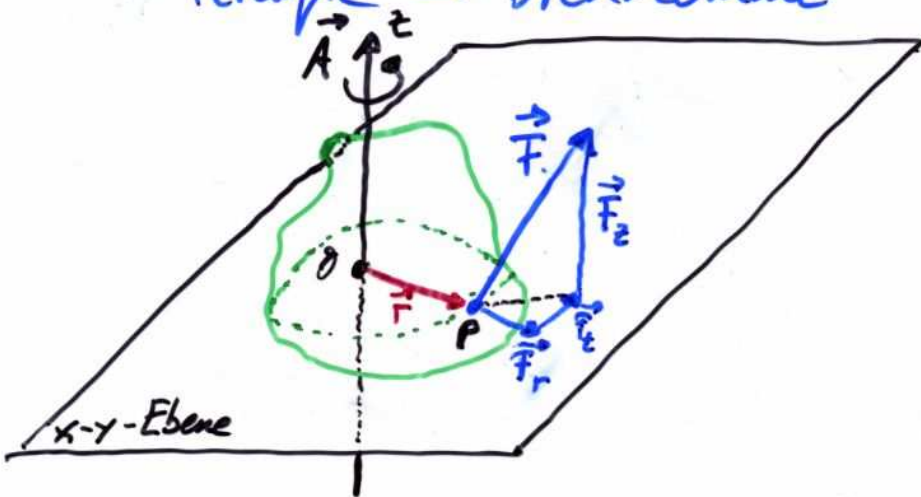
↳ $\vec{v}_{is} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{is}$

↳ $\vec{v}_i = \vec{v}_s + \vec{\omega} \times \vec{r}_{is}$

→ 6 Freiheitsgrade der Bewegung: 3 Translation + 3 Rotation

9.1 Drehmoment

• Kräfte \rightarrow Drehmoment



$$\vec{F}_r \parallel \vec{r} \rightarrow \vec{r} \times \vec{F}_r = 0$$

$$\vec{F}_t \parallel \vec{A} \quad (\hat{=} z\text{-Achse})$$

$$\vec{F}_t \perp \vec{r}, \vec{F}_t \perp \vec{A}$$

\rightarrow Drehmoment

$$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (\vec{F}_r + \vec{F}_t + \vec{F}_z)$$

$$= \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}_t}_{\parallel \vec{A}} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}_z}_{\perp \vec{F}_t}$$

Falls Drehachse \vec{A} durch Schwerpunkt S verläuft
und $\vec{F} = -M\vec{g}$:
d.h. $\vec{r}_S = 0$

$$\vec{D} = - \int_M \vec{r} \times \vec{g} dm = \vec{g} \times \int_M \vec{r} dm = \vec{g} \times M\vec{r}_S = 0$$

\rightarrow stabile Lage des Körpers

NB: Falls \vec{A} nicht durch S \rightarrow Umwand
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Kräfte von} \\ \text{Achslager} \\ \text{aufzunehmen} \end{array} \right.$

9.2 Rotationsenergie, Trägheitsmoment

- starrer Körper rotiert um feste Achse \vec{A}
- kinetische Energie der Rotation:

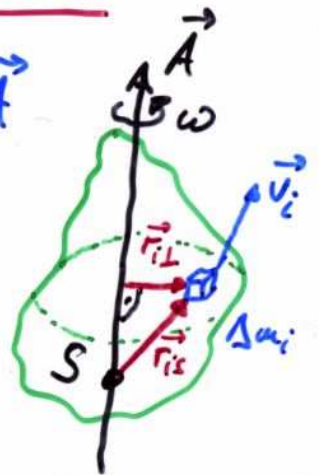
$$E(\Delta m_i) = \frac{1}{2} \Delta m_i \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i (r_{i\perp} \cdot \omega)^2$$

$\sum \Delta m_i \rightarrow \int \dots dm$

→

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \underbrace{\int_M r_{\perp}^2 dm}_{=: I} = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot I$$

Rotationsenergie



mit $I := \int_M r_{\perp}^2 dm$ Trägheitsmoment

z.B. □ Vollzylinder



$$I_S = \frac{1}{2} MR^2$$

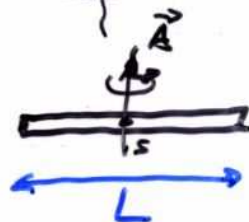
↖ Achse durch Schwerpunkt.

□ Hohlzylinder
(Wanddicke $d \ll R$)



$$I_S = MR^2$$

□ dünner Stab



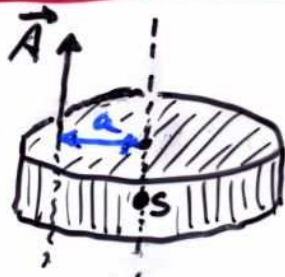
$$I_S = \frac{1}{12} ML^2$$

- Falls Drehachse \vec{A} im Abstand a von Schwerpunkt

$$I_A = I_S + a^2 \cdot M$$

Steinerscher Satz

z.B.



9.3 Drehimpuls, Trägheitstensor

• Drehimpuls $\vec{L} = \int \vec{r}_\perp \times d\vec{p} = \int \vec{r}_\perp \times \vec{v} dm$ $\left(\begin{array}{l} \vec{r}_\perp \perp \vec{A} \\ \vec{r}_\perp \perp \vec{\omega} \end{array} \right)$

$$= \int \vec{r}_\perp \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\perp) dm$$

$$= \int \vec{\omega} r_\perp^2 dm - \int \underbrace{\vec{r}_\perp \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\perp)}_{=0} dm$$

$$\vec{L} = \vec{\omega} \cdot \int_M r_\perp^2 dm = \vec{\omega} \cdot \mathbf{I}$$

• Drehimpulserhaltung $\vec{L} = \text{const}$ ohne äußere Kräfte

• Trägheitsmoment beliebiger (i.A. nicht-rotationssym.) Körper

$$\vec{L} = \dots = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm = \int [r^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}] dm$$

$$= \int \left[\underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{=r^2} \cdot \vec{\omega} - (x \cdot \omega_x + y \cdot \omega_y + z \cdot \omega_z) \vec{r} \right] dm$$

$$= \int \left[\begin{array}{l} (r^2 - x^2) \omega_x - xy \omega_y - xz \omega_z \\ -yx \omega_x + (r^2 - y^2) \omega_y - yz \omega_z \\ -zx \omega_x - zy \omega_y + (r^2 - z^2) \omega_z \end{array} \right] dm$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \vec{\omega} \cdot \mathbf{I}$$

$=: \mathbf{I}$ Trägheitstensor

mit $I_{xx} := \int (r^2 - x^2) dm$, $I_{yy} := \int (r^2 - y^2) dm$, ...

$I_{xy} := -\int xy dm$, $I_{xz} := -\int xz dm$, ...

$I_{yx} := -\int yx dm \equiv I_{xy}$, $I_{zx} \equiv I_{xz}$, ...

Trägheitstensor kann diagonalisiert werden
 durch geeignet zu wählende Haupt(koordinat)achsen:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & \dots \\ & \ddots & \\ & & I_{zz} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{pmatrix}$$

mit $I_a \leq I_b \leq I_c$

NB: Hauptachse \cong freie Achsen

freie Achse \cong raumfester Drehachsen bei
 Rotation mit $\vec{\omega} = \text{const}$ (ohne Achslagerung)
 (raumfeste Drehachsen sind nicht
 notwendigerweise stabil)

NB: I_a, I_b, I_c folgen aus Lösung von [\cong Eigenwertproblem!]

$$\det \begin{pmatrix} I_{xx} - I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - I \end{pmatrix} = 0$$

Determinante ergibt Polynom 3. Grades \rightarrow 3 Nullstellen
 bei $I = I_a, I_b, I_c$

Mit den 3 Haupt-Trägheitsachsen und den Trägheitsmomenten
 I_a, I_b, I_c kann der starre Körper durch ein Ellipsoid
ersetzt werden, welches gleiches Verhalten bei Rotation um
 eine beliebige Achse zeigt wie der betrachtete starre Körper

z.B.



Trägheitsellipsoid
 ($I_a = I_b < I_c$)

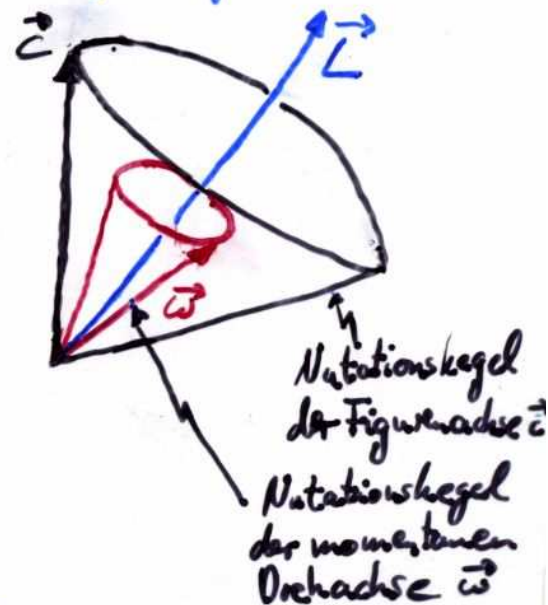
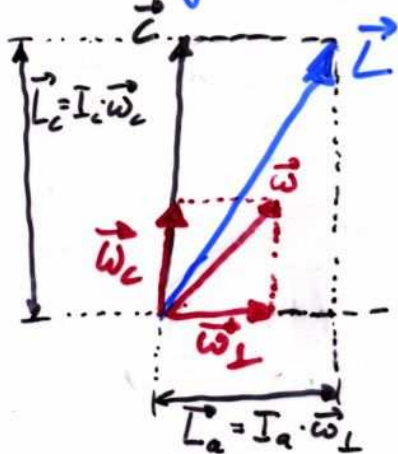
9.4 Kreisel: Nutation, Präzession

Kreisel: i.a. rotations-sym \rightarrow Trägheitsmomente
 (z.B. um Hauptachse \vec{c}) $I_a = I_b \neq I_c$

- kräftefrei Kreisel: im Schwerpunkt S unterstützt, ohne äußeres Drehmoment \vec{D} .
 \rightarrow Drehimpuls $\vec{L} = \text{const}$
 (\vec{L} ist raumfest)

allgemeine Beschreibung des kräftefreien Kreisels besitzt:

- ▶ Drehimpulsachse \vec{L} : raumfest, da $\vec{L} = \text{const}$
- ▶ momentane Drehachse $\vec{\omega}$: i.a. nicht raumfest
- ▶ Figurenachse \vec{c} : nur raumfest, falls $\vec{c} \parallel \vec{L}$



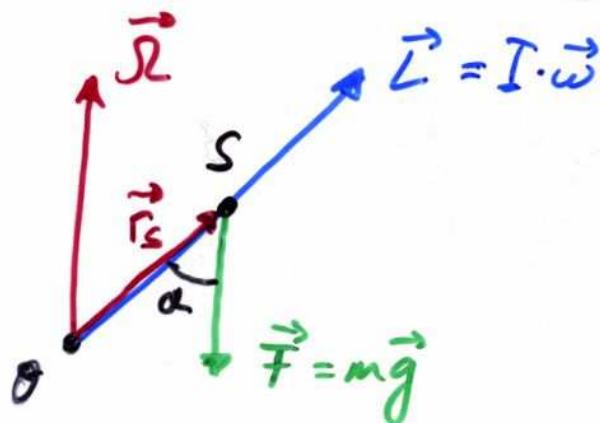
kräftefreier Kreisel zeigt Nutation

wenn $\vec{\omega} \not\parallel \vec{c}$: $\vec{\omega}, \vec{c}$ beschreiben Nutationskegel um \vec{L}

• Kreisel mit äußerem Drehmoment

z.B. \vec{D} durch Schwerkraft, falls Kreisel nicht im Schwerpunkt S unterstützt:

→ Drehimpuls $\vec{L} \neq \text{const}$, aber $L = |\vec{L}| = \omega \cdot I = \text{const}$



Drehmoment $\vec{D} = \vec{r}_S \times \vec{F} = \vec{r}_S \times m\vec{g}$

→ Richtung von $\vec{D} \perp \vec{r}_S - \vec{F}$ -Ebene

→ $\vec{D} \perp \vec{L} \rightarrow \vec{L}$ rotiert um $\vec{\Omega}$: Präzession

$$\vec{D} = \dot{\vec{L}} = \vec{r}_S \times \vec{F} = r_S \cdot \left(\frac{\vec{L}}{L}\right) \times F \cdot \left(\frac{-\vec{\Omega}}{\Omega}\right) = -\frac{r_S F}{L \Omega} (\vec{L} \times \vec{\Omega})$$

→ $\Omega = |\vec{\Omega}| = \frac{r_S F}{L} = \frac{r_S \cdot mg}{I \cdot \omega}$ Präzessionsfrequenz

$$\dot{\vec{L}} = -\frac{r_S F}{L \Omega} (\vec{L} \times \vec{\Omega}) \rightarrow \ddot{\vec{L}} = \frac{r_S F}{L \Omega} (\vec{\Omega} \times \dot{\vec{L}}) = -\left(\frac{r_S F}{L \Omega}\right)^2 [\vec{\Omega} \times (\vec{L} \times \vec{\Omega})] = -\left(\frac{r_S F}{L \Omega}\right)^2 [L^2 \vec{\Omega} - \vec{\Omega} (\vec{L} \cdot \vec{\Omega})]$$

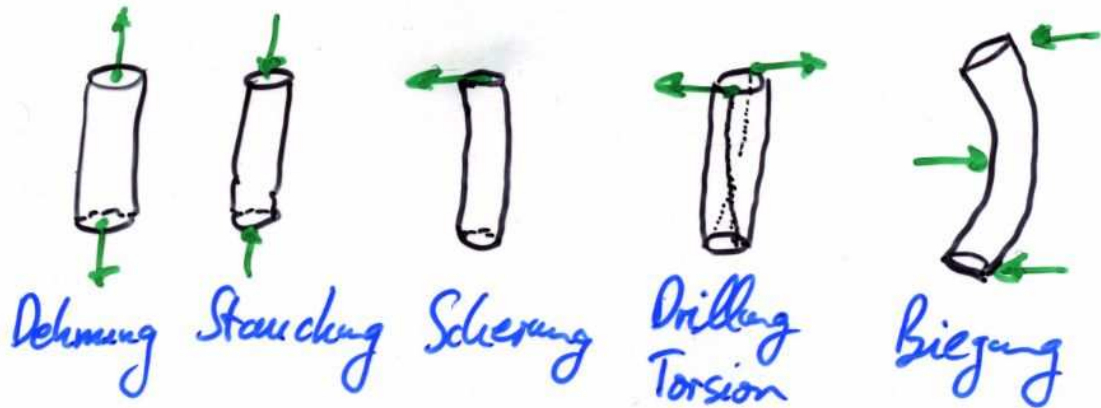
zerlege $\vec{L} = \vec{L}_{\parallel \Omega} + \vec{L}_{\perp \Omega} \rightarrow \ddot{\vec{L}} = \ddot{\vec{L}}_{\parallel \Omega} + \ddot{\vec{L}}_{\perp \Omega} = -\left(\frac{r_S F}{L \Omega}\right)^2 [(\vec{L}_{\parallel \Omega} + \vec{L}_{\perp \Omega}) \Omega^2 - \vec{\Omega} \cdot (\vec{L}_{\parallel \Omega} \cdot \vec{\Omega} + \vec{L}_{\perp \Omega} \cdot \vec{\Omega})]$

→ $\ddot{\vec{L}}_{\perp \Omega} = -\left(\frac{r_S F}{L \Omega}\right)^2 [L_{\parallel \Omega} \Omega^2 - \vec{\Omega} (\vec{L}_{\parallel \Omega} \cdot \vec{\Omega}) + L_{\perp \Omega} \cdot \Omega^2]$

→ $\ddot{\vec{L}}_{\perp \Omega} + \left(\frac{r_S F}{L}\right)^2 \vec{L}_{\perp \Omega} = 0$ entspricht Schwingungs-DGL → $\Omega = \left(\frac{r_S F}{L}\right)$

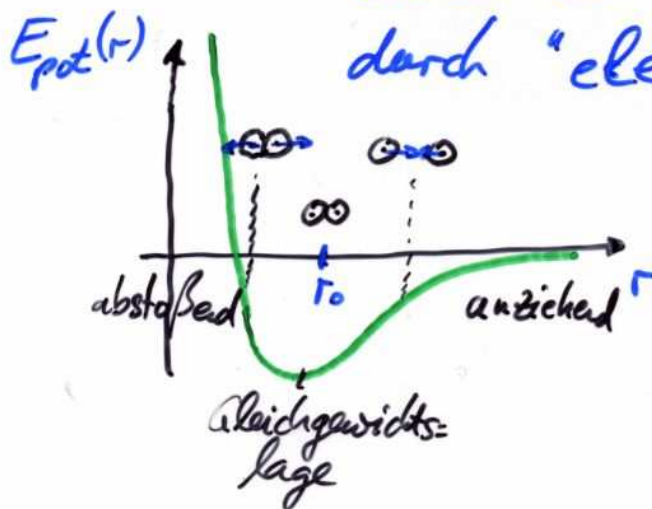
10 Mechanik deformierbarer Medien

Grundtypen der Deformation:



10.1 Das Elastizitätsmodell, Hookesches Gesetz

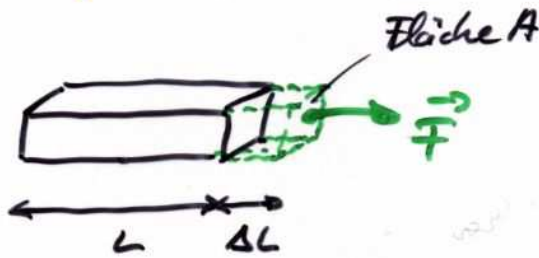
Mikroskopisch: Atomen/Molekülen ziehen sich an/stoßen sich ab durch "elektrostatische" Kräfte



Minimum des Potentials E_{pot} ist näherungsweise parabelförmig: $E_{pot}(r) = \frac{D}{2} (r_0 - r)^2 + const$

$\vec{F} = -grad E_{pot} \rightarrow F(r) = D \cdot (r_0 - r) = D \cdot \Delta r$
entspricht Federkraft!

→ Deformation von Körpern mit makroskop. Größen



$$F = D \cdot \Delta L \quad \text{gemäß mikro-} \\ \text{skop. Modell}$$

makroskop. Eigenschaften der Federkonstanten D :

$$\left. \begin{array}{l} \blacktriangleright D \sim A \\ \blacktriangleright D \sim \frac{1}{L} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{DL}{A} = \text{const}$$

⇒
Hookesches
Gesetz

$$F = D \cdot \Delta L = A \cdot \underbrace{\frac{D \cdot L}{A}}_{=: \text{Elastizitätsmodul } E} \cdot \frac{\Delta L}{L} =: \frac{A \cdot E}{L} \cdot \Delta L$$

E , $[E] = \text{N/m}^2$

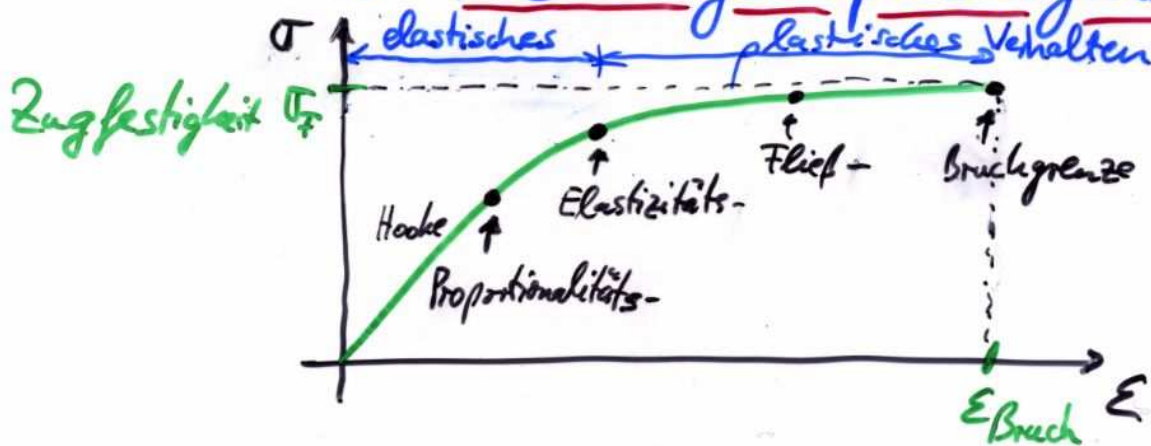
Mit mechanischer (Zug- / Druck-) Spannung $\vec{\sigma} := \frac{\vec{F}}{A}$
und relativer Dehnung: $\epsilon := \frac{\Delta L}{L}$

→ $\sigma = E \cdot \epsilon$ Hookesches Gesetz

| Material | $E \left[\cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$ | ϵ_{Bruch} |
|-----------------------|---|---------------------------|
| Aluminium | 72 | 0.5 |
| V2A-Stahl | 195 | 0.45 |
| Kupfer (kalt gezogen) | 126 | 0.02 |
| Quarzglas | 76 | ... |

- NB: zu große Dehnung
↳ Abweichungen vom parabelförmigen Potential
↳ nicht-lineares Kraftgesetz

⇒ (vereinfachtes) Dehnungs-Spannungsdiagramm



NB: Nach plastischer Verformung bleibt Restdeformation $\epsilon_R \neq 0$

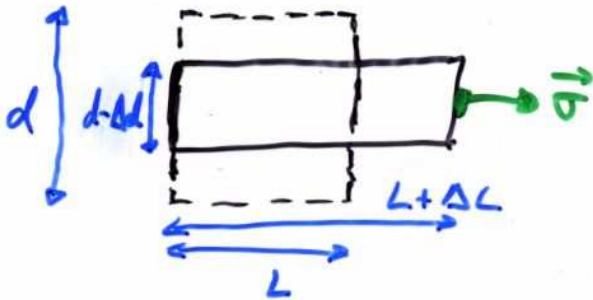
10.2 Querkontraktion, Poissonzahl

- Unter Dehnung kontrahiert Körper in Querrichtung:

Querkontraktion

beschrieben durch

$$\mu := - \frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta L}{L}} \quad \text{Poisson-} \\ \text{Zahl}$$



→ Volumenänderung durch Zugspannung $\vec{\sigma}$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{2\Delta d}{d} = \frac{\sigma}{E} \cdot (1 - 2\mu)$$

$$\Gamma \quad V = L \cdot d^2 \rightarrow \Delta V = d^2 \cdot \Delta L + L \cdot 2d \cdot \Delta d$$

$$\Delta \rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta L}{L} - 2\mu \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta L}{L} (1 - 2\mu) \\ = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu)$$

10.3 Kompressibilität, Kompressionsmodul

- Unter allseitigen Druck $\Delta p = -\sigma$ folgt

[Körper in allen drei
Richtungen gleichartig
durch Druck Δp ge-
stäncht, Querkontraktion
widersetzt sich Stänchung
und vergrößert Volumen
[ein wenig.]

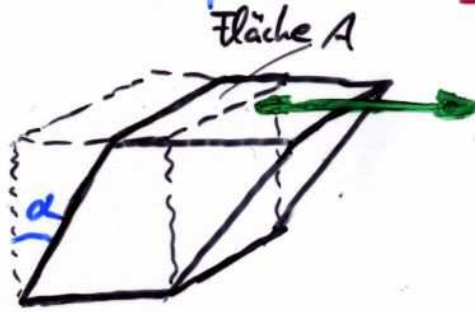
$$\rightarrow \frac{\Delta V}{V} = - \frac{3\Delta p}{E} (1 - 2\mu) =: -\kappa \cdot \Delta p$$

$$\kappa := \frac{3}{E} (1 - 2\mu) \quad \text{Kompressibilität}$$

$$K := - \frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}} \cdot V = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} = \frac{1}{\kappa} \quad \text{Kompressionsmodul}$$

10.4 Schub-/Scher-/Torsionsmodell

Scherung:



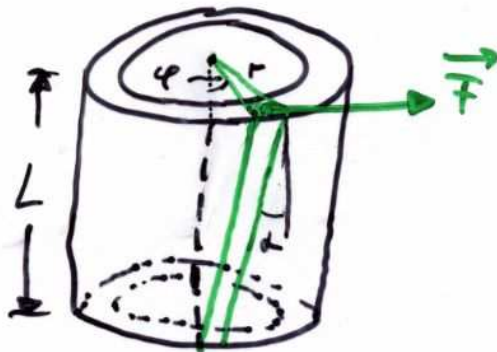
$$\vec{\tau} := \frac{\vec{F}}{A} \text{ Scherspannung}$$

Scherwinkel α :

$$\tau = G \cdot \alpha$$

Schubmodul G (auch: Schermodul)

Torsion:



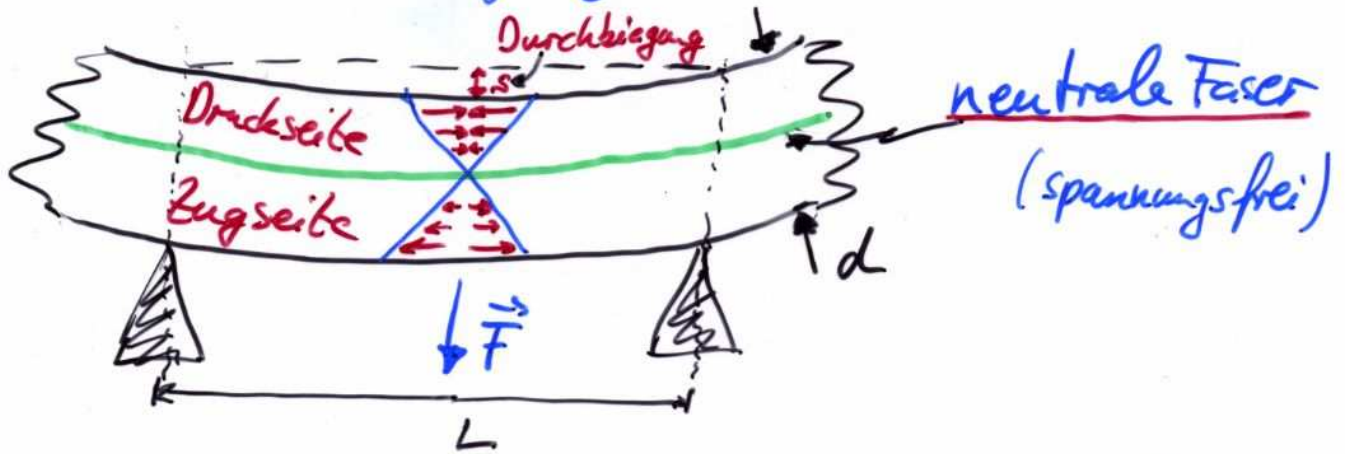
$$\tau = G \cdot \alpha = G \cdot \frac{r \cdot \varphi}{L}$$

(auch: Torsionsmodul)

Schub-/Scher-/Torsionsmodell:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{3K}{2} \cdot \frac{1-2\mu}{1+\mu}$$



10.5 Biegung eines Balkens



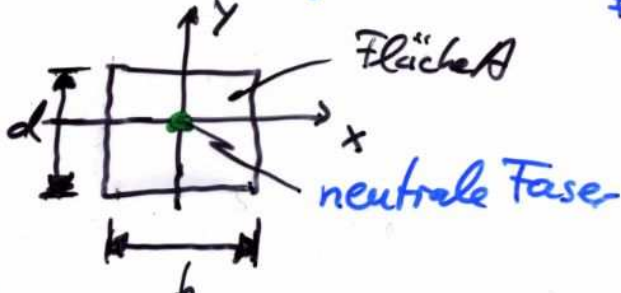
aus Differentialgeometrie folgt Ergebnis für Durchbiegung eines Balkens mit Querschnitt $b \cdot d$

$$s_{\max} = \frac{1}{4E} \cdot \frac{L^3}{d^3 \cdot b} \cdot F \sim \frac{L^3}{d^3}$$

Größe der Durchbiegung hängt ab von:

► Art der Einspannung: einseitig , zweiseitig 

► Art der Last: Punktlast , Linienlast 

► Profil des Balkens: 

charakterisiert durch

Flächenträgheitsmoment: $J_y := \int y^2 dA = \iint y^2 dx dy$

z.B. rechteckiger Querschnitt: $J_y = \frac{1}{12} b d^3$

für obiges Beispiel

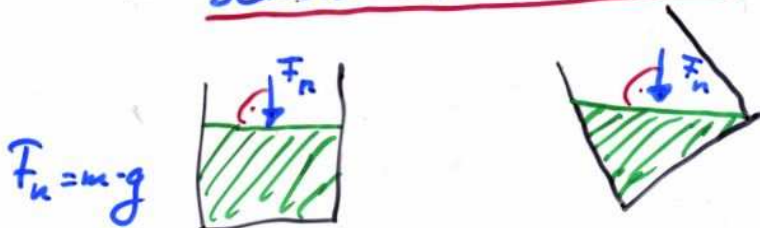
$$\rightarrow s_{\max} = \frac{1}{48E} \cdot \frac{L^3}{J_y} \cdot F = \frac{1}{4E} \cdot \frac{L^3}{d^3 b} \cdot F$$

11 Hydrostatik

- ▶ deformierbare Körper: Atome/Moleküle \therefore w. ortsfest und nur geringfügig verschiebbar, starker Zusammenhalt
 - ▶ Flüssigkeit: Atome/Moleküle frei verschiebbar, aber zusammenhängend
 - ▶ Gase: Atome/Moleküle frei verschiebbar und ohne starken Zusammenhalt
- (Zusammenhalt $\hat{=}$ Kräfte zw. Atomen/Molekülen)

Ideale Flüssigkeit: keine Reibungskräfte
keine Oberflächeneffekte

- Scherkräfte werden sofort ausgeglichen
- Schubmodul $G=0$ für ideale Flüssigkeit



- Flüssigkeitsoberfläche immer senkrecht zur einwirkenden Normalkraft F_n

11.1 Druck und Auftrieb

• Druck

$$p := \frac{F}{A}$$

mit $F := |\vec{F}|$

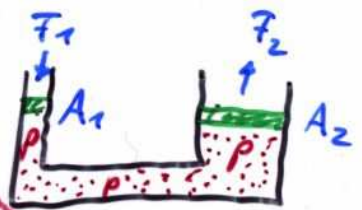
Einheit: $1 \frac{N}{m^2} = 1 Pa \hat{=} 10^{-5} bar$
Pascal

- ▶ Kraft F auf Fläche A eines abgeschlossenen Flüssigkeitsvolumens
- ▶ Kraft F von abgeschlossnem Flüssigkeitsvolumen auf Fläche A

Innerhalb der Flüssigkeit

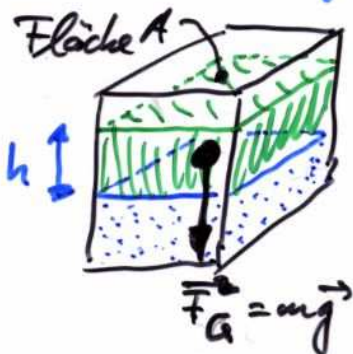
- ▶ ruhendes Volumenelement erfährt Gesamtkraft Null
- Druck in Flüssigkeit überall gleich
(falls keine Schwerkraft)

Anwendung: hydraulische Presse



$$\frac{F_1}{A_1} = p = \frac{F_2}{A_2} \rightarrow F_2 = F_1 \cdot \frac{A_2}{A_1}$$

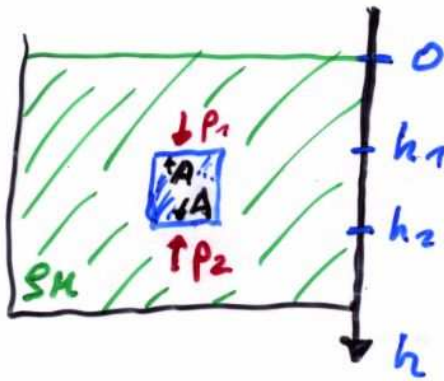
• Schwerkraft ruft Schweredruck hervor



$$F_G = mg = \rho V \cdot g = \rho \cdot A \cdot h \cdot g$$

$$\rightarrow p = \frac{F_G}{A} = \rho \cdot h \cdot g$$

Auftrieb



$$p = p(h) = \rho \cdot h \cdot g$$

→ Druckdifferenz (oben-unten)

$$\Delta p := p_2 - p_1 = p(h_2) - p(h_1) \\ = \rho \cdot h_2 \cdot g - \rho \cdot h_1 \cdot g$$

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$$

Fläche A des Körpers: $F = \Delta p \cdot A = A \cdot \rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1) \\ = g \cdot \rho \cdot A \cdot (h_2 - h_1)$

$$\rightarrow F_A = g \cdot \rho \cdot V_{\text{verdrängtes Medium}} = g \cdot M_{\text{verdrängt Medium}}$$

Auftriebskraft

Volumen des Körpers $\hat{=}$ Volumen des verdrängten Mediums

- ⇒
- ▶ Sinken $F_G > F_A = g \cdot \rho \cdot V_{\text{verdrängtes Mediums}}$
 - ▶ Schwimmen $F_G < F_A$
 - ▶ Schweben $F_G = F_A$

11.2 Kompressibilität (vgl. 10.3)

Volumenänderung unter allseitigen Druck

$$\frac{\Delta V}{V} = - \frac{1}{K} \cdot \Delta p = - \kappa \cdot \Delta p$$

Kompressionsmodul Kompressibilität

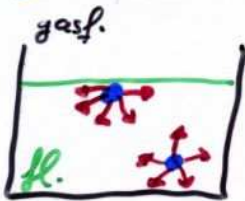
NB: für Gase wie Luft: Schweredruck + Kompressibilität → $\rho = \rho(h) \rightarrow$ barometr. Höhenformel $p(h) \sim \exp(-h)$

11.3 Grenzflächen: fest-flüssig-gasförmig

- Atome/Moleküle in Festkörper / Flüssigkeiten/Gas ziehen sich mehr oder weniger stark an
 typ. Festkörper, Flüssigkeiten typ. Gas

→ Kohäsionskräfte (zwischen gleichartige Körpern)

- An Grenzflächen können diese Kräfte sichtbar werden

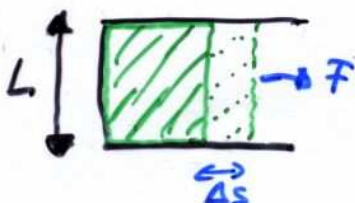


Heranslösen eines Atoms/Moleküls aus Flüssigkeitsoberfläche erfordert Arbeit ($\int \vec{F} d\vec{s}$)

→ Arbeit ΔW zur Vergrößerung der Grenzfläche ΔA zwischen Flüssigkeit und Gas:

→ $\boxed{\epsilon := \frac{\Delta W}{\Delta A}}$ spezifische Oberflächenenergie

$\left. \begin{aligned} \Delta W &= F \cdot \Delta s \\ \Delta A &= L \cdot \Delta s \end{aligned} \right\} \boxed{\epsilon = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F \cdot \Delta s}{L \cdot \Delta s} = \frac{F}{L} =: \sigma}$ Oberflächen- spannung



z.B. $\sigma_{H_2O} = 0.073 \frac{J}{m^2} \left(\frac{1 N}{m} \right)$
 $\sigma_{Hg} = 0.471 \frac{J}{m^2}$

z. B. Seifenblase:



$$A = 4\pi r^2$$

• Druckkraft: $F = \Delta p \cdot A = \Delta p \cdot 4\pi r^2$

• Energiegewinn aus

Oberflächenverringern: $\Delta W = F \cdot \Delta r$

$$\rightarrow \Delta W = 2 \cdot \epsilon \cdot \Delta A = 2\epsilon \cdot 4\pi \cdot \Delta(r^2)$$

↑ Seifenfilm hat 2 Oberflächen!

$$\rightarrow F \cdot \Delta r = \Delta p \cdot 4\pi r^2 \cdot \Delta r \stackrel{!}{=} 2\epsilon \cdot 4\pi \Delta(r^2) = 2\epsilon \cdot 4\pi \cdot 2r \Delta r$$
$$\stackrel{!}{=} 2\epsilon \cdot 8\pi r \Delta r$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta p = \frac{4\epsilon}{r} = \frac{4\sigma}{r}} \sim \frac{1}{r}$$

NB: Analog folgt Druck in Flüssigkeitstropfen zu $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$, da nur 1 Oberflächfläche

Grenzflächenkräfte

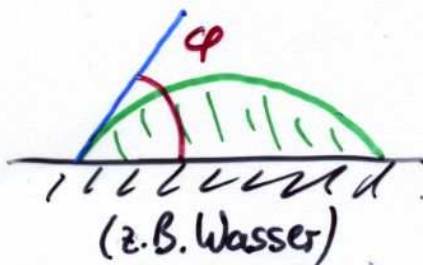
▶ Kohäsion: zwischen gleichartige Atome/Moleküle

▶ Adhäsion: — — — — — verschiedenartigen — — — — —

Grenzflächenverhalten

benetzend

(Adhäsion > Kohäsion)

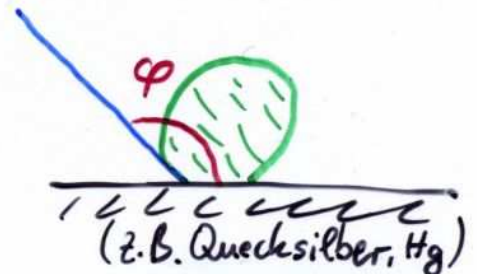


(z.B. Wasser)

Randwinkel: $0 < \varphi < 90^\circ$

nicht-benetzend

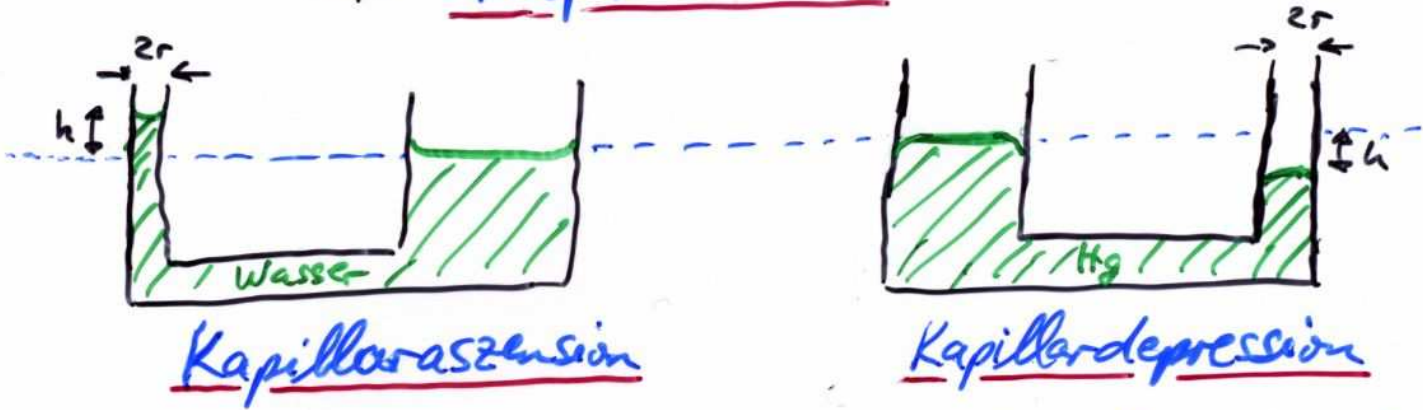
(Adhäsion < Kohäsion)



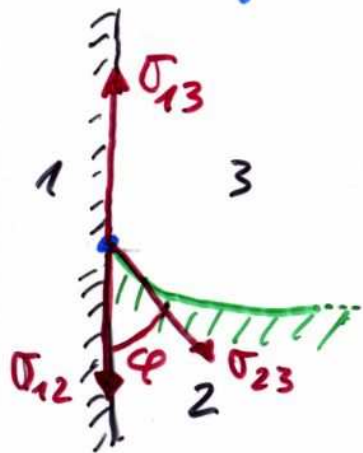
(z.B. Quecksilber, Hg)

$90^\circ < \varphi < 180^\circ$

⇒ Kapillarität



Steighöhe: Oberflächenspannung an Randlinie: $F_\sigma = \sigma \cdot 2\pi r$
 Gewichtskraft der Flüssigkeitssäule: $F_G = mg = \rho \cdot g \cdot h \cdot \pi r^2$



$$F_\sigma \cdot \cos \varphi \stackrel{!}{=} F_G$$

↑ Randwinkel abhängig von Benetzung

$$\sigma \cdot 2\pi r \cdot \cos \varphi \stackrel{!}{=} \rho \cdot g \cdot h \cdot \pi r^2$$

$$h = \frac{2\sigma \cdot \cos \varphi}{\rho \cdot g \cdot r} \quad \begin{array}{l} \text{vollständig} \\ \text{benetzend} \\ \varphi = 0^\circ \end{array} \quad \frac{2\sigma}{\rho g r}$$

► vereinfacht: Oberflächenspannung versucht Kontaktfläche zu verkleinern (Minimalflächen)

→ Gleichgewicht: (der Oberflächenspannungen) $\sigma_{12} + \sigma_{23} \cdot \cos \varphi - \sigma_{13} \stackrel{!}{=} 0$

$$\cos \varphi = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}}$$

NB: $\sigma_{13} - \sigma_{12}$ Haftspannung

• σ_{12} kann negativ sein bei Benetzung an Grenzfläche 12

$0^\circ < \varphi < 90^\circ$: benetzend

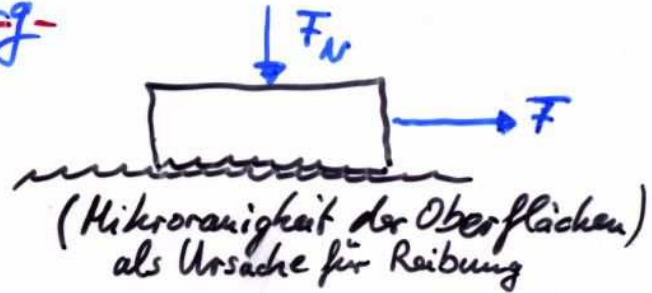
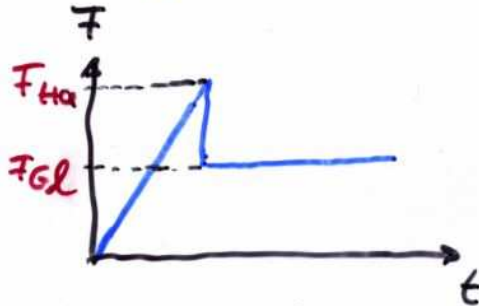
$90^\circ < \varphi < 180^\circ$: nicht-benetzend

11.4 Reibung an Grenzflächen

Grenzflächenkräfte treten auch zwischen Festkörpern auf

• Coulomb-Reibung (oder trockene Reibung)

▶ Haft- und Gleitreibung



Körper haftet → $F < F_{Ha}$
„ gleitet → $F = F_{Gl}$

mit
mit

$$F_{Ha} = \mu_H F_N$$

$$F_{Gl} = \mu_G F_N$$

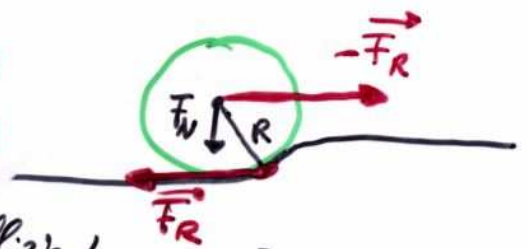
Haft- / Gleitreibungskoeffizienten μ_H / μ_G ; F_N : Normalkraft zur Oberfläche
 i.A. $\mu_H > \mu_G$

NB: (lineare) Reibung ist unabhängig von Größe der Berührungsfläche

▶ Rollreibung

$$D_R = R \cdot F_R = \mu_R \cdot F_N$$

Rollreibungskoeffizient, $[\mu_R] = m$



▶ typ. Werte für Reibungskoeffizienten

| | | | | |
|-------------------------------|---------------------|---------------|--------------------------|-----|
| □ Stahl auf Stahl | $\mu_H = 0.5 - 0.8$ | $\mu_G = 0.4$ | $\frac{\mu_R}{R} = 0.05$ | ... |
| □ Gummi auf Asphalt (trocken) | 1.2 | 1.05 | ... | ... |
| □ " " (nass) | 0.6 | 0.4 | ... | ... |

- Arbeit bei Reibung 

$$W = \int \vec{F} d\vec{s} = \int F_{Reib} ds = \int \mu_G \cdot F_N ds = \mu_G \cdot mg \cdot s$$

$$\rightarrow W \sim s, \quad W \sim F_N$$

- Stokes-Reibung (oder: viskose Reibung)

NB: nicht zu große Körper, nicht zu schnell bewegt

z.B.: Kugel, Radius R in Fluid mit Viskosität η

$$F_{Stokes} = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \rightarrow F_{Stokes} \sim v$$

↑
Geschwindigkeit

- Newton-Reibung

NB: schnellere Bewegung größerer Körper durch Fluid

$$F_{Newton} = \frac{1}{2} c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 \rightarrow F_{Newton} \sim v^2$$

Widerstands-
beiwert,
von Form des
Körpers abhängig

Dichte des
Fluid

Querschnitts-
fläche des
Körpers

z.B.



$$c_w = 1.17$$



$$c_w = 0.05$$

12 Hydro-/Aerodynamik

... beschreibt Strömungen von Fluiden

Charakterisierung:

▶ Strömungsfeld mit Stromlinien

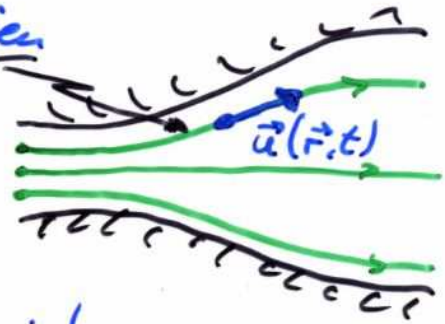
▶ Strömungsgeschwindigkeit

$$\vec{u}(\vec{r}, t)$$

NB: • $\vec{u}(\vec{r}, t)$ ist ortsabhängig!

• Falls $\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}(\vec{r})$, unabhängig von Zeit t

→ stationäre Strömung



Man unterscheidet

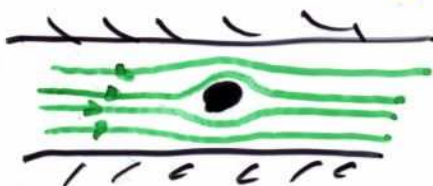
▶ Arten von Fluids

□ ideale Flüssigkeiten/Gase: vernachlässigbare Reibungskräfte zw. Teilchen

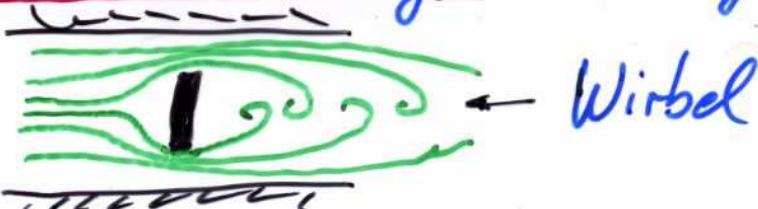
□ viskosen/zähen Flüssigkeiten: starke/überwiegende Reibungskräfte

▶ Arten von Strömungen

□ laminare Strömungen: Reibungskräfte \gg Beschleunigungskräfte



□ turbulente Strömungen: Reibung $<$ Beschleunigung



12.1 Ideale Flüssigkeiten

12.1.1 Euler-Gleichung

Bewegungsgleichung für Teilchen in idealen Flüssigkeiten

Kräfte auf Teilchen:

► Schwerkraft: $\vec{F}_G = \Delta m \cdot \vec{g}$

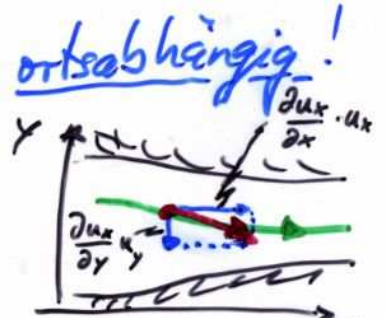
► Druckgradient: $\vec{F}_p = -\vec{\nabla} p \cdot dV = -\text{grad} p \cdot dV = -(\vec{\nabla} p) \cdot \frac{\Delta m}{\rho}$

z.B. Druckänderung entlang x-Richtung

$p(x+dx) = p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx$ und $p(x) = p$
 $\rightarrow F_x = [p(x) - p(x+dx)] \cdot dA = [p - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx)] \cdot dx dy = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dV$

► Beschleunigungskraft: zeit- und ortsabhängig!

z.B. in x-Richtung



$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{dt}}_{u_x} + \underbrace{\frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{dt}}_{u_y} + \underbrace{\frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}}_{u_z}$$

$$\rightarrow \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_x$$

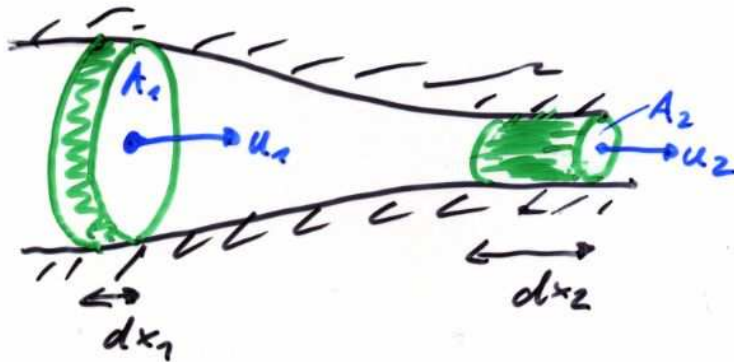
dito für y, z-Richtung } $\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \stackrel{!}{=} \frac{\vec{F}_G}{\Delta m} + \frac{\vec{F}_p}{\Delta m}$
 $\hat{=} \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \vec{u}) = \vec{u} \cdot (\text{grad} \vec{u})$ mit Tensor $\text{grad} \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \dots & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \dots & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \dots & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} (\vec{\nabla} p)$$

Euler-Gleichung

der Hydrodynamik

12.1.2 Kontinuitätsgleichung



Masse in Scheiben:

$$dm = \rho_1 \cdot A_1 \cdot dx_1 \stackrel{!}{=} \rho_2 \cdot A_2 \cdot dx_2 = dm$$

$$\rightarrow \frac{dm}{dt} = \rho_1 \cdot A_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = \rho_1 A_1 u_1 \stackrel{!}{=} \rho_2 A_2 u_2 = \rho_2 A_2 \cdot \frac{dx_2}{dt}$$

$$\rightarrow \boxed{\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2} \xrightarrow[\text{Flüssigkeiten}]{\text{inkompressible}} \boxed{A_1 u_1 = A_2 u_2 = \text{const}}$$

makroskopische Kontinuitätsgleichung

• (Massen-) Stromdichte / (Massen-) Flussdichte

$$\boxed{\vec{j} := \rho \cdot \vec{u}} \quad \text{mit} \quad \boxed{\int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = -\dot{m} = -\frac{d}{dt}(\rho \cdot V)}$$

Wenn $\vec{j} \parallel \vec{A}$, dann nimmt Masse im eingeschlossenen Volumen ab!

$$\int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) \cdot dV \stackrel{!}{=} -\dot{m} \stackrel{V=\text{const}}{=} -\dot{\rho} V$$

Satz von Gauß-Ostrogradski



$$\left. \frac{d}{dt} \right| \rightarrow \boxed{\rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \dot{\rho} + \text{div} \vec{j} = 0} \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

NB: (Volumen-) Stromstärke $I := -\frac{1}{\rho} \int \vec{j} \cdot d\vec{A} = +\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho \cdot V) \stackrel{\rho=\text{const}}{=} \frac{dV}{dt}$

12.1.3 Bernoulli-Gleichung

Betrachte stationäre Strömung, d.h. $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{u} = 0$

→ Euler-Gleichung

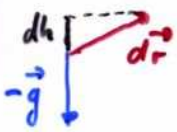
$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) - \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) \stackrel{!}{=} \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

$$\nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) : \text{z.B. } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{2} \right) = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \rightarrow \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) = \vec{u} (\nabla \cdot \vec{u})$$

$$\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) = \vec{u} \cdot (\nabla \vec{u}) - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \quad \text{Beachte, dass } \nabla \text{ immer auf ein } \vec{u} \text{ wirkt!}$$

$$\nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) - \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) = \vec{u} (\nabla \cdot \vec{u}) - [\vec{u} \cdot (\nabla \vec{u}) - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}] = (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{u} \cdot \text{grad } \vec{u}$$

$$|\cdot d\vec{r}| \stackrel{!}{=} |\cdot \vec{u} dt| \rightarrow \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) \cdot d\vec{r} - \underbrace{[\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u})] \cdot \vec{u} dt}_{\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) \perp \vec{u}} - \underbrace{\vec{g} \cdot d\vec{r}}_{g dh} + \underbrace{\frac{1}{\rho} (\nabla p) \cdot d\vec{r}}_{\frac{1}{\rho} dp} = 0$$



$$\rightarrow d\left(\frac{u^2}{2}\right) - 0 + g dh + \frac{1}{\rho} dp = 0$$

$\int d\vec{r}$
entlang
Stromröhre

$$\rightarrow \frac{1}{2} (u^2 - u_0^2) + g(h - h_0) + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)} = 0$$

Bernoulli-Gleichung

inkompressible
Flüssigkeit, $\rho = \text{const}$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \cdot gh + p = \text{const}$$

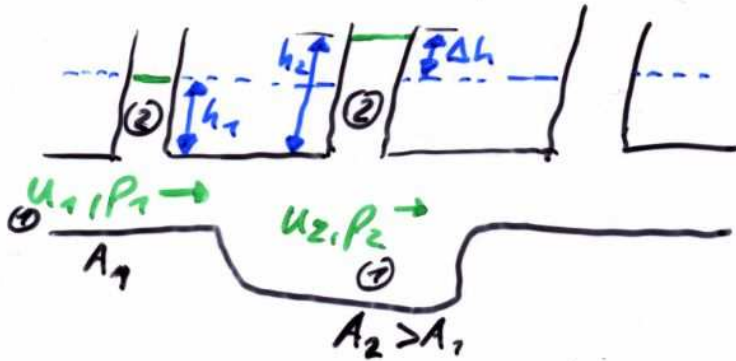
NB: vgl. Energieerhaltung: $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} + p \cdot V = \frac{1}{2} \rho u^2 + mgh + pV = \text{const}$

$$|\cdot \frac{1}{V}| \rightarrow \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \cdot gh + p = \text{const}$$

Bernoulli-Gleichung $\hat{=}$ Energieerhaltung in
Hydrodynamik

Beispiele der Anwendung der Bernoulli-Gl.

- Staudruck $p_s = \rho \cdot \frac{u^2}{2}$



$$\textcircled{1}: \rho \frac{u_1^2}{2} + p_1 = \rho \frac{u_2^2}{2} + p_2$$

$$u_1 A_1 = u_2 A_2 \rightarrow u_2 = u_1 \frac{A_1}{A_2}$$

$$u_2 < u_1$$

$$\rightarrow \Delta p := p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2} (u_1^2 - u_2^2)$$

$$\rightarrow \Delta p > 0$$

$$\textcircled{2}: 0 + p_1 = p_0 + \rho g h_1$$

$$0 + p_2 = p_0 + \rho g h_2$$

$$\rightarrow \Delta h := h_2 - h_1 = \frac{1}{\rho g} (p_2 - p_1)$$

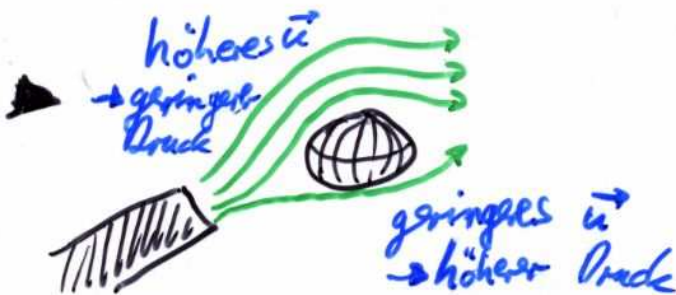
$$\rightarrow \Delta h = \frac{1}{2g} (u_1^2 - u_2^2) > 0$$

- hydrostatisches Paradoxon



Luftstrom zwischen zwei Blätter

→ Blätter werden zusammengedrückt

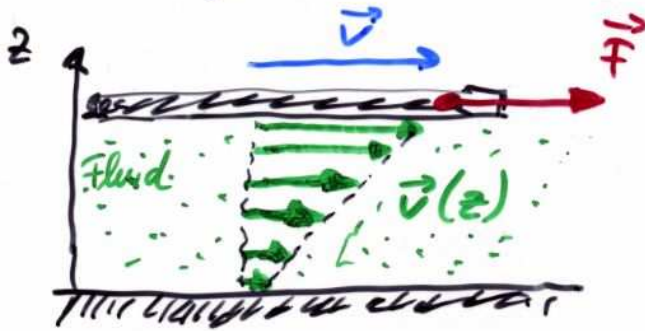


$$\frac{1}{2} \rho u^2 + p = \text{const}$$

12.2 Dynamische Zähigkeit, Viskosität

- Viskosität / Zähigkeit beschreiben innere Reibung

→ bewegte Flüssigkeiten/Gase haben dynamische Scherspannung $\vec{\tau}$

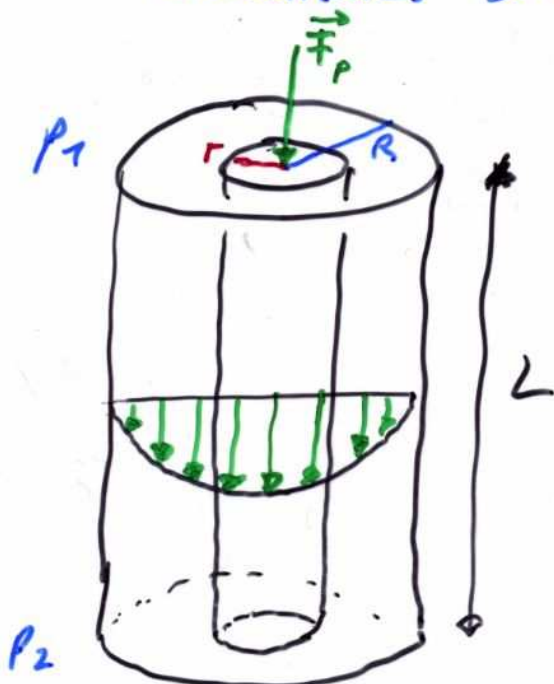


$$\vec{\tau} = \frac{\vec{F}}{A} = \eta \cdot \frac{d\vec{v}}{dz}$$

Viskosität
Einheit: $[\eta] = \frac{Ns}{m^2} = Pa \cdot s$

| | |
|-------------|-------------------------------|
| z.B. Wasser | $\eta = 0.001025 Pa \cdot s$ |
| Glycerin | $\eta = 1.528 Pa \cdot s$ |
| Luft (1bar) | $\eta = 0.0000174 Pa \cdot s$ |

- Laminares Strömungsprofil in Rohr



- ▶ Reibungskraft an axialem Flüssigkeitszylinder (Radius r , Länge L)

$$F_R = A \cdot \eta \cdot \frac{dv}{dr} = 2\pi r \cdot L \cdot \eta \cdot \frac{dv}{dr}$$

- ▶ Druckkraft auf Zylinderdeckel

$$F_p = \pi r^2 \cdot (p_1 - p_2)$$

- ▶ stationärer Zustand: $F_R = F_p$

$$\Rightarrow \dots \frac{dv}{dr} = \frac{p_1 - p_2}{2\eta L} \cdot r = \frac{\Delta p}{2\eta L} \cdot r$$

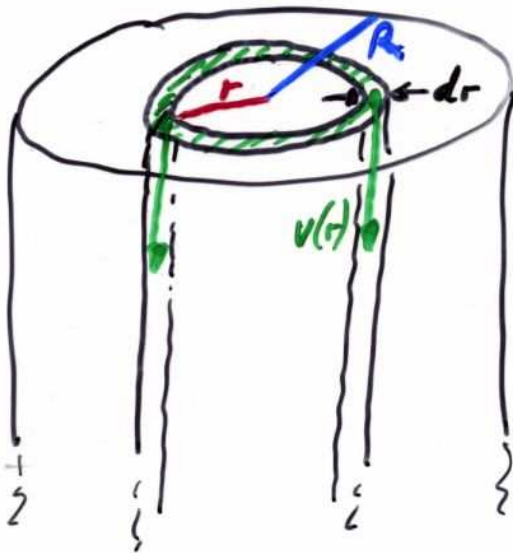
$$\int \frac{dv}{dr} \Rightarrow v(r) = v_0 - \frac{\Delta p}{4\eta L} r^2$$

parabolisches Geschwindigkeitsprofil

$$(v_0 := \frac{\Delta p}{4\eta L} \cdot R^2)$$

12.3 Strömungswiderstand

Betrachte laminares Strömungsprofil im Rohr



Volumenstromstärke dI
durch Hohlzylinder
zwischen r und $r+dr$

$$dI = d\dot{V} = 2\pi r \cdot dr \cdot v(r)$$

$$= 2\pi r \cdot \left(v_0 - \frac{\Delta p}{4\eta L} \cdot r^2 \right) dr$$

$$\rightarrow I = \dot{V} = \int_0^R d\dot{V} = \int_0^R \dots dr$$

$$\rightarrow \boxed{I = \dot{V} = \frac{\pi \cdot \Delta p}{8\eta L} \cdot R^4}$$

Gesetz von Hagen-Poiseuille

- NB: Stromstärke $\triangleright I \sim R^4$
 $\triangleright I \sim \frac{1}{L}$
 $\triangleright I \sim \Delta p$

$$\left[\begin{array}{l} I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{A} \\ \vec{j} = \rho \vec{v} \\ dA = 2\pi r \cdot dr \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} dI = v \cdot dA = 2\pi r \cdot dr \cdot v(r) \end{array} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Umfang Hohlzylinder}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Mantelstärke Hohlzylinder}}$

12.4 Navier-Stokes-Gleichung

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\vec{u}}{dt} &= \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \rho \vec{g} + \eta (\nabla^2) \vec{u} \\ &= \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \text{ grad}) \vec{u} \right) = -\text{grad } p + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{u} \end{aligned}$$

$\Delta := \nabla^2$ Laplace-Operator

Lösung: schwierig analytisch zu finden!

- Computersimulation ($\hat{=}$ numerische Lösung)
- experimentelle Lösung (z.B. Windkanal)

↳ Ähnlichkeitsgesetze

- Geometrische Ähnlichkeit (Abmessung, Oberfläche, Form)

- Hydrodynamische Ähnlichkeit

 - ▶ Dichte ρ , Viskosität η ,
mittlere Geschwindigkeit \bar{v}

- Kennzahlen (d: lineare Abmessung oder Durchmesser)

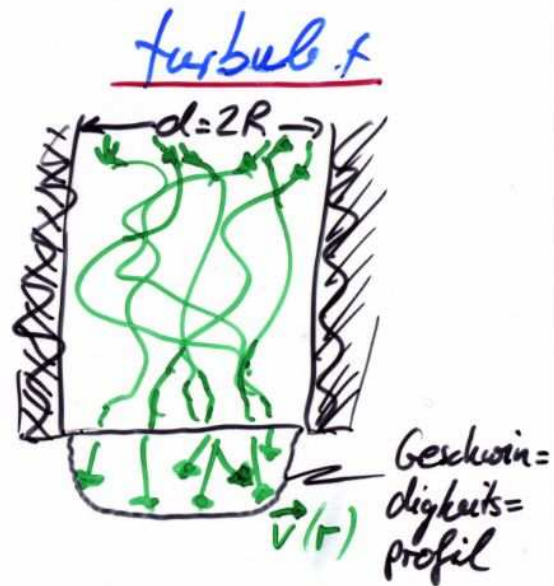
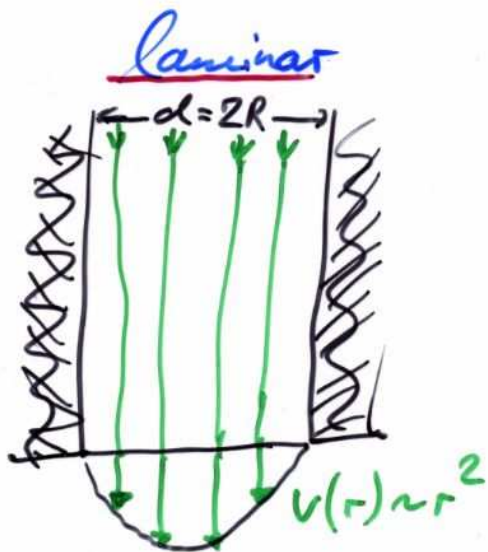
 - ▶ Reynoldszahl: $Re = \frac{d \cdot \rho \cdot \bar{v}}{\eta} \hat{=} \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}}$

 - ▶ Froude-Zahl: $Fr := \frac{\bar{v}}{\sqrt{d \cdot g}} \hat{=} \sqrt{\frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Schwerkraft}}}$

 - ▶ Mach-Zahl: $M := \frac{v}{v_{\text{Schall}}}$

→ Ähnlichkeit: z.B. Widerstandswerte c_w geometrisch ähnlicher Körper stimmen überein, wenn Reynoldszahlen gleich sind
NB: $Re = \text{const} \rightarrow \bar{v} \sim 1/d$

12.5 Turbulente Strömungen



Charakteristikum:

$$Re \leq Re_c$$

$$Re > Re_c$$

mit kritischer Reynoldszahl Re_c

z.B. ▶ rundes Rohr, Durchmesser $d = 2R$

$$Re_c = \frac{2R \cdot \rho \cdot \bar{v}_c}{\eta} \approx 2300$$

▶ rundes Rohr mit glattem Einlauf

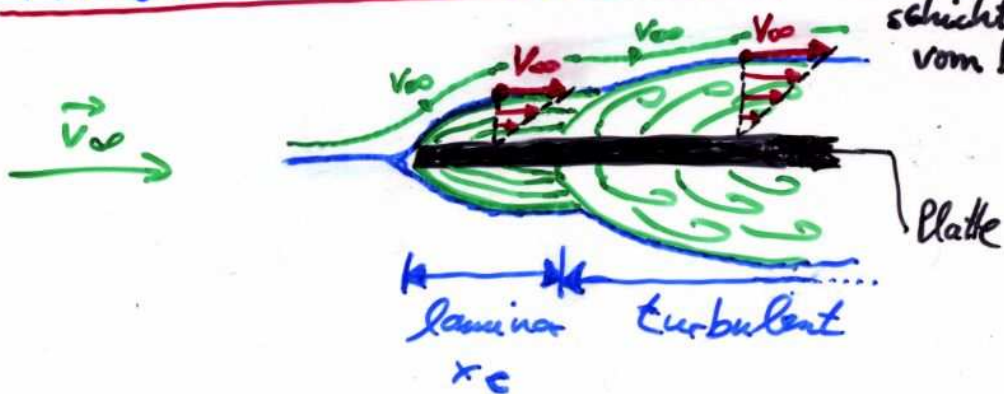
$$Re_c \approx 20000$$

▶ dito mit scharfkantigem Einlauf

$$Re_c = 1000 - 1200$$

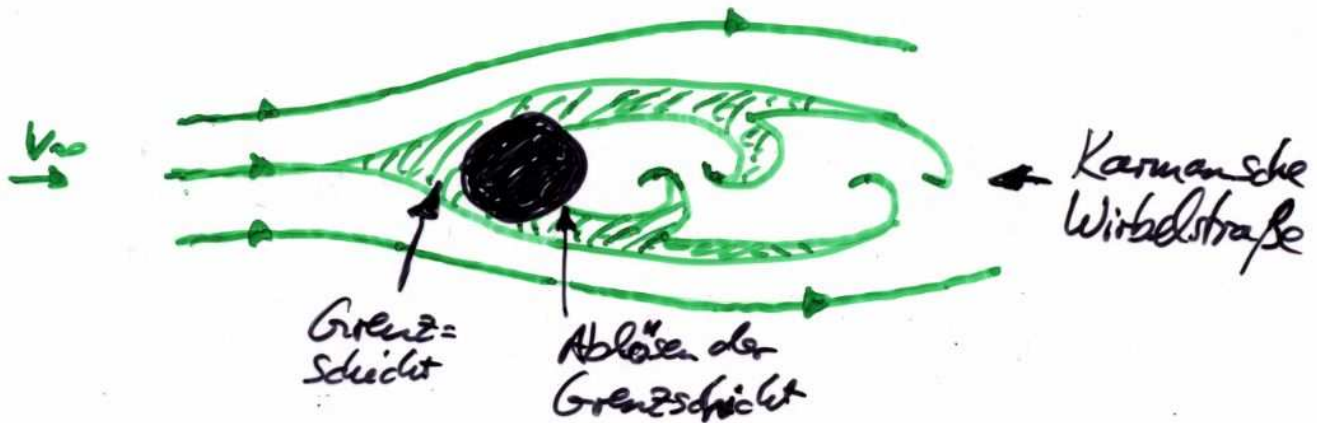
12.5.1 umströmte Körper

Prandtl'sche Grenzschicht: In Prandtl'scher Grenzschicht nimmt v linear vom Körper bis zur Grenzgeschwindigkeit v_0 zu

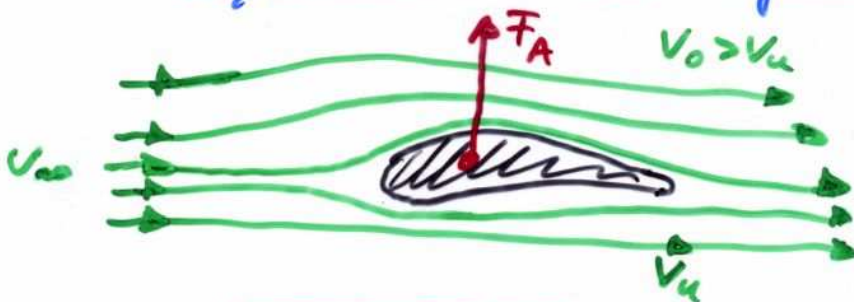


$$Re_c = \frac{\rho \cdot v \cdot x_c}{\eta} \approx 5 \cdot 10^5$$

Abreißen der Prandtl'schen Grenzschicht für $Re > Re_c$



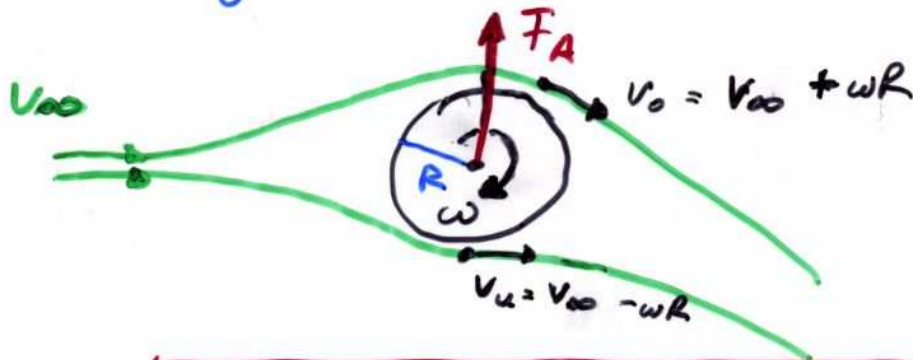
dynamischer Auftrieb



$$F_A = \Delta p \cdot A = c_A \cdot \frac{\rho}{2} (v_0^2 - v_u^2)$$

Flügelfläche dynamischer Auftrieb (abhängig vom Profil)

• Magnus-Effekt



rotierender Zylinder
mit Länge L , Radius R

$$F_A = 2\omega \cdot v_\infty \cdot \rho \cdot (\pi R^2 L)$$

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{1}{2} \rho (v_o^2 - v_u^2) \quad \text{vgl. Bernoulli-Gleichung} \\ &\approx \frac{1}{2} \rho \left[(v_\infty + \omega R)^2 - (v_\infty - \omega R)^2 \right] = \dots = 2\rho \omega R \cdot v_\infty \end{aligned}$$

$$\rightarrow F_A = \Delta p \cdot A \quad \longrightarrow \quad F_A = 2\rho \omega R \cdot v_\infty \cdot \pi R L = 2\omega v_\infty \rho \cdot \underbrace{\pi R^2 L}_{\text{Zylindersvolumen}}$$

$\uparrow A = \frac{1}{2} \cdot (2\pi R \cdot L)$
Zylinder-
oberfläche