Fourieranalyse:

Periodische Funktionen $f(t)$ mit der Periode $T = 2\pi/\omega$ können in eine Fourierreihe entwickelt werden,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

Die Fourierkoeffizienten a_n und b_n können hierbei mit den folgenden Formeln berechnet werden:

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t &= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} [f(t)+f(-t)]\cos(n\omega t)\mathrm{d}t \\
b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t &= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} [f(t)-f(-t)]\sin(n\omega t)\mathrm{d}t \\
c_n = a_n + ib_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)[\cos(n\omega t) + i\sin(n\omega t)]\mathrm{d}t &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)e^{in\omega t}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Hierbei wurden die Symmetrieeigenschaften der *Sinus* und *Cosinus* Funktionen hervorgehoben und ausgenutzt. Aus diesen Formeln und den Symmetrieeigenschaften der Zeitfunktion $f(t)$ kann man die verschwindenden Fourierkoeffizienten leicht bestimmen:

$$\begin{aligned}
f(t) = f(-t) &\longrightarrow b_n = 0 \\
f(t) = -f(-t) &\longrightarrow a_n = 0 \\
f(t+T/2) = -f(-t) &\longrightarrow a_{2n} = 0 \text{ und } b_{2n} = 0 \\
f(t) = -f(-t) \text{ und } f(t+T/2) = -f(-t) &\longrightarrow a_n = 0 \text{ und } b_{2n} = 0 \\
f(t) = f(-t) \text{ und } f(t+T/2) = f(-t) &\longrightarrow b_n = 0 \text{ und } a_{2n} = 0
\end{aligned}$$

Im allgemeinsten Fall ist jedoch die komplexwertige Berechnung der Fourierkoeffizienten c_n die schnellste Möglichkeit, die Fourierzerlegung einer gegebenen Zeitfunktion $f(t)$ zu ermitteln. Dies gilt insbesondere im Fall der Fourieranalyse nichtperiodischer Funktionen. In diesem Fall sind die unendlichen Summen durch Integrale zu ersetzen:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \\
g(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Die Fouriertransformierte von $f(t)$ ist eine Funktion $g(\omega)$ der Kreisfrequenz und umgekehrt, d.h. die kontinuierliche Fouriertransformation ist eine Abbildung zwischen zwei "Räumen": dem Zeitraum t und dem Frequenzraum ω. Solche Räume heißen "konjugiert" zueinander und die zugehörigen Größen t und ω heißen konjugierte Größen.
Weitere Darstellungen periodischer Fourierzerlegungen sind

$$\begin{aligned}
f(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\omega t - \phi_n), \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \tan\phi_n = \frac{b_n}{a_n}, \\
f(t) &= B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin(n\omega t - \psi_n), \quad B_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \tan\psi_n = -\frac{a_n}{b_n},
\end{aligned}$$

mit den Amplituden A_n, B_n und den Phasen ϕ_n, ψ_n.