

Aufgabe 1:

(7 Punkte)

Betrachten Sie einen relativistischen elastischen Stoß zwischen zwei gleichen Teilchen der Masse m . Vor dem Stoß sei ein Teilchen in Ruhe.

Wie groß ist der Winkel θ zwischen den Impulsvektoren der Teilchen nach dem Stoß? (Geben Sie den Winkel als Funktion der Geschwindigkeiten β ($\beta = v/c$) und der Lorentz-Faktoren γ der relevanten Teilchen an.)

Zeigen Sie, dass der Winkel im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten der nicht-relativistischen Erwartung entspricht!

(Anleitung: Betrachten Sie die Viererimpulse der Teilchen vor und nach dem Stoß, geben Sie dafür den relativistischen Energiesatz vor und nach dem Stoß an und ersetzen Sie in geeigneter Weise Energien und Impulse durch lorentz-invariante Massen. Nutzen Sie aus, dass $c\vec{p} = E\vec{\beta}$ und $E = \gamma mc^2$ gilt, um den Ausdruck für $\cos \theta$ zu vereinfachen)

Aufgabe 2:

(7 Punkte)

Auf Übungsblatt Nr. 4 wurde in Aufgabe 3 ein Loch betrachtet, welches geradlinig vom Nordpol zum Südpol durch die Erde verlaufen sollte. In dieses Loch sollte eine Kugel der Masse $m = 1$ kg mit Anfangsgeschwindigkeit Null fallen.

Damals wurde das Gravitationspotential der Erde zu

$$V(r) = -G_N m M_E \cdot \begin{cases} \frac{1}{2R_E^3}(3R_E^2 - r^2) & \text{für } r < R_E \\ \frac{1}{r} & \text{für } r \geq R_E \end{cases}$$

berechnet, wobei $R_E = 6378$ km der Erdradius, $M_E = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg die Erdmasse sind und r vom Erdmittelpunkt aus gemessen wird. In dieser Aufgabe soll nun die Zeitdauer ermittelt werden, die die Kugel zum Durchqueren der Erde benötigt.

- Berechnen Sie die Zeitdauer T_a , indem Sie aus der Gravitationskraft $\vec{F} = -\text{grad}V(r) = m\vec{a}$ für $r < R_E$ die Beschleunigung ermitteln und diese mit geeigneten Randbedingungen über r integrieren. (Anleitung: Aus $\ddot{r} = \dot{v} = a$ folgt $d(v^2) = 2adr$, d.h. Integration von $\int adr$ ergibt v^2 und mit $\frac{1}{v}dr = dt$ folgt die Zeitdauer T_a . Beachten Sie, dass $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x)$.)
- Stellen Sie eine Differentialgleichung (Bewegungsgleichung) für die Bewegung der Kugel auf. Um welche Art von Differentialgleichung (DGL) handelt es sich? Lösen Sie diese DGL und bestimmen Sie die Zeitdauer T_b der Erddurchquerung!
- Betrachten Sie die hypothetische Umlaufbahn eines Satelliten in Höhe Null über dem Erdboden. Wie groß ist die Zeitdauer T_c eines halben Umlaufs?
- Vergleichen Sie T_a , T_b , T_c . Was fällt Ihnen dabei auf?

Aufgabe 3:

(6 Punkte)

Jede komplexe Zahl läßt sich eindeutig schreiben als Realteil plus i -mal Imaginärteil. Dabei ist $i = \sqrt{-1}$.

- Berechnen Sie i^2 , i^3 , i^4 , i^5 , i^0 .
- Eine komplexe Zahl läßt sich auch mit ebenen Polarkoordinaten r , φ als $z = x + iy = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \exp(i\varphi)$ schreiben. Drücken Sie r , φ aus durch x , y und x , y durch r , φ . Schreiben Sie z^* (komplex konjugiert) in Polarkoordinaten.
- Bilden Sie $z_1 \pm z_2$ und $z_1 \cdot z_2$ in Polarkoordinaten.
- Bilden Sie die komplexe Zahl z_1/z_2 (für $z_2 \neq 0$) in beiden Darstellungen.
- Macht der Ausdruck $z_1^{z_2}$ für zwei komplexe Zahlen z_1 , z_2 Sinn? Wie würden sie diese Potenz berechnen?
- Geben Sie alle unterschiedlichen (!) Lösungen zur Gleichung $z^5 = 243$ in beiden Darstellungen an!