Herleitung der Raketengleichung

In der Vorlesung wurde die Raketengleichung ausgehend von Impulserhaltung hergeleitet. Dies soll hier nochmals zusammengefasst werden, um die dabei aufgetretenen Fragen zu klären.

- Es wurde die Impulserhaltung

$$\vec{p}_R + \vec{p}_G = m\vec{v}_R + \text{``}m_G\vec{v}_G\text{''} = \text{const.} \qquad (*)$$

für die Rakete und das ausströmende Gas betrachtet. Nun muss aber berücksichtigt werden, dass es sich in der hier betrachteten Relation bei m_G um die gesamte ausgestoßene Gasmasse handelt, die tatsächlich zu verschiedenen Zeitpunkten mit verschiedenen Geschwindigkeiten $\vec{v}_G(t)$ ausgestoßen wurde.
Um dies korrekt zu berücksichtigen, kann dieser Beitrag des Impulses als

$$\text{``}m_G\vec{v}_G\text{''} := \int_0^{m_G} \vec{v}_G(m)\mathrm{d}m_G = \int_0^t \vec{v}_G(t)\frac{\mathrm{d}m_G}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}t = \int_0^t \dot{m}_G \cdot \vec{v}_G(t)\cdot \mathrm{d}t$$

geschrieben werden. Eingesetzt in die Gleichung $(*)$ folgt:

$$m\vec{v}_R + \int_0^t \dot{m}_G\vec{v}_G(t)\cdot \mathrm{d}t = \text{const.}$$

und daraus durch Zeitableitung:

$$\dot{m}\vec{v}_R + m\dot{\vec{v}}_R + \vec{v}_G\dot{m}_G = 0 \qquad (**) \quad .$$

Weil die ausströmende Gasmasse die Raketenmasse reduziert, gilt $\dot{m}_G = -\dot{m}$, sodass sich nach Einführung der Ausströmgeschwindigkeit des Gases aus der Rakete $\vec{v}_r := \vec{v}_R - \vec{v}_G$ =const., d.i. die Relativgeschwindigkeit von Rakete und Gas, die Gleichung

$$\dot{m}\left(\vec{v}_R - \vec{v}_G\right) + m\dot{\vec{v}}_R = \dot{m}\vec{v}_r + m\dot{\vec{v}}_R = 0$$

ergibt, aus der durch Integration nach Separation der Veränderlichen die Bewegung der kräftefreien Rakete folgt:

$$\vec{v}_R(t) = \vec{v}_0 - \vec{v}_r \cdot \ln\frac{m(t)}{m_0} \quad ,$$

wie in der Vorlesung angegeben.

- Als alternative Herangehensweise hätte man in der Impulserhaltung $(*)$ statt der Gesamtgasmenge nur die über einen kurzen Zeitraum $\mathrm{d}t$ ausgestoßene Gasmenge $\mathrm{d}m_G$ betrachten können, also

$$m\vec{v}_R + \mathrm{d}m_G \cdot \vec{v}_G = m\vec{v}_R + \dot{m}_G\mathrm{d}t \cdot \vec{v}_G = \text{const.} \quad ,$$

was zum gleichen Ergebnis wie oben führt, denn durch Zeitableitung folgt daraus

$$\dot{m}\vec{v}_R + m\dot{\vec{v}}_R + \vec{v}_G\dot{m}_G\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \dot{m}\vec{v}_R + m\dot{\vec{v}}_R + \vec{v}_G\dot{m}_G = 0 \quad ,$$

also genau wieder die Gleichung $(**)$.

- Eine äußere Kraft F_a kann einfach hinzugefügt werden:

$$\dot{m}v_r + m\dot{v}_R = F_a \quad .$$

Da $\dot{v}_R = a_R$ die Beschleunigung der Rakete ist, muss eine bremsende äußere Kraft die Beschleunigung $a_R = -\dot{m}v_r$ der kräftefreien Rakete verringern, also $F_a = -mg$.