Allgemeines zu Meßfehlern und zur Fehlerrechnung

Bei jeder Messung können zwei Typen von Meßfehlern auftreten:

systematische Fehler und *statistische Fehler*.

Systematische Fehler sind durch Fehler eines Meßinstrumentes oder des Meßverfahrens an sich verursacht (z.B. ein zu kurzer Metermaßstab). Diese Fehler verfälschen das Ergebnis immer in eine bestimmte Richtung, so daß die Messung entweder zu groß oder zu klein ausfällt. Als Ursachen sind u.a. eine falsche Eichung (z.B. Längeneichung eines Metallstabes bei Raumtemperatur, jedoch Einsatz des "geeichten" Metallstabes bei 0°C) oder in der Nichtberücksichtigung von Nebeneffekten liegen (z.B. verminderter Reifendurchmesser durch zu niedrigen Luftdruck und damit Fehlmessung der Geschwindigkeit aus der Drehzahl des Reifens). Systematische Fehler sind nur durch eine kritische physikalische Analyse des Meßverfahrens und der Meßgeräte zu vermeiden. Sie können *nicht* mit Hilfe der Fehlerrechnung entdeckt werden!

Statistische Fehler sind von ihrer Natur her *Zufallsfehler*. Sie treten durch verschiedene Störeinflüsse bei Messungen auf und führen dazu, daß bei der Wiederholung von Messungen nicht absolut gleiche Ergebnisse erhalten werden: Die Meßwerte streuen. Wird z.B. ein Gegenstand mehrmals hintereinander gewogen, so erhält man unterschiedliche Ergebnisse. Auch bei größter Sorgfalt wird die Stellung des Zeiger zwischen den zwei feinsten Strichen der jeweiligen Skala nicht immer gleich abgelesen. Weiterhin kommt die Waage selbst nicht immer an derselben Stelle zum Stillstand. So sind Zufallsfehler das Resultat einer Vielzahl von Störfaktoren wie beispielsweise Schwankungen der kontrollierbar und stabil angenommenen Randbedingungen.
Nun könnte man solche Störfaktoren als systematische Fehler auffassen. Der wesentliche Unterschied zu systematischen Fehlern liegt jedoch in der Zufälligkeit des Störfaktors und damit des Fehlers! Natürlich kann man versuchen, Störquellen auszuschalten oder Meßverfahren zu finden, die insensitiv auf Störquellen aller Art sind. Aber auch dies wird die zufälligen Einflüsse nicht unterbinden oder verkleinern. Verkleinert werden nur die systematischen Einflüsse.

Die Aufgabe der Fehlerrechnung als Teilbereich der mathematischen Statistik ist nun folgende:
Ein gemessener Wert ist nicht genau der "wahre" Wert. Jeder gemessene Wert x ist aus dem hypothetischen "wahren" Wert der Meßgröße μ und einer Fehlerkomponente F zusammengesetzt: $x = \mu + F$. Der Fehler hat nun auch zwei Komponenten für den statistischen F_{stat} und den systematischen Fehler F_{syst}, die (symbolisch) zu F zusammengefaßt werden können: $F = F_{\text{stat}}$ "+" F_{syst}. Mit Hilfe der Fehlerrechnung soll von den Meßwerten auf den "wahren" Wert zurückgeschlossen und zudem die Zuverlässigkeit der Messung, d.i. der Fehler, abgeschätzt werden.
Dafür gibt es unterschiedliche Ansätze. Der weitaus gebräuchlichste ist eine Stichprobe, d.h. die gleiche Messung wird mehrfach wiederholt. Als beste Schätzung des — unbekannten "wahren" — Wertes μ betrachtet man den arithmetischen Mittelwert[1] $\bar{x}$ oder auch Erwartungswert $E(x) \equiv \bar{x}$ von N Messungen:

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Daraus folgt, daß die Summe aller Abweichungen $\Delta x_i \equiv x_i - \bar{x}$ verschwindet: $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i - \bar{x} = 0$. Die Zufallsfehler kompensieren sich für den arithmetischen Mittelwert!
Kommen einzelne Meßergebnisse mehrfach vor, läßt sich der Mittelwert mit Hilfe der Angabe von Häufigkeiten $h_i = n_i/N$ darstellen: $\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} h_i \cdot x_i$. Die relative Häufigkeit h_i des Meßergebnisses x_i geht beim Grenzübergang $N \to \infty$ in die Wahrscheinlichkeit p_i für den Wert x_i über.

Ein Maß für die Zuverlässigkeit einer Messung erhält man aus den Abweichungen der Einzelmessungen vom "wahren" Werte μ. Diese Abweichungen sind umso geringer, je zuverlässiger und genauer die Messungen sind. Um dies zu quantitativ zu erfassen, wird ein Streuungsmaß definiert. Ausgangspunkt ist die Summe der Quadrate der Einzelabweichungen vom "wahren" Wert, mit der die *Varianz* σ^2 durch[2]

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 \qquad (*)$$

[1] Es gibt andere Mittelwerte, z.B.
Geometrisches Mittel: $\bar{x}_g = \sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_N}$
Harmonisches Mittel: $\frac{1}{\bar{x}_h} = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_N}\right)$

[2] Es ist eine gängig Konvention, den *"wahren"* Wert und die *"wahre"* Varianz mit μ und σ^2 zu bezeichnen, während für den *"gemessenen"* Mittelwert und die *"gemessene"* Varianz einer Stichprobe $\bar{x}$ bzw. s^2 angegeben werden, d.h. $\mu \approx \bar{x}$ und $\sigma^2 \approx s^2$. Dies ist beim Studium der Literatur unbedingt zu beachten, weil auch andere Bezeichnungsweisen gebräuchlich sind.

abgeschätzt wird. Die Wahl der Abweichungsquadrate als Grundlage für das Streuungsmaß geht auf Gauß zurück (Gaußsche Methode der kleinsten Quadrate). Da der "wahre" Wert i.a. nicht bekannt ist, kann die Varianz s^2 durch den arithmetischen Mittelwert $\bar{x}$ angenähert werden. Dazu wird $\bar{x} = \mu + \Delta$ in Gleichung (*) eingeführt. Eine kurze Rechnung ergibt: $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 + (\Delta x)^2$. Nun ist $(\Delta x)^2$ immer positiv, d.h. der Ausdruck $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$ unterschätzt die Varianz. Daher lautet der exakte Ausdruck zur Abschätzung der Varianz, der hier ohne Rechnung wiedergegeben wird (s. beispielsweise: R. Zurmühl: *Praktische Mathematik*, Berlin 1965, S. 278ff):

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

(Man beachte, daß sich nur der Vorfaktor geändert hat! In den meisten Fällen ist N so groß, daß man den Unterschied zwischen $1/N$ und $1/(N-1)$ vernachlässigen kann.) Für die Abschätzung der Standardabweichung ergibt sich

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Aus der Varianz der Einzelwerte σ^2 kann die Varianz des Mittelwertes σ_M^2 berechnet werden (s. beispielsweise: B.L. van der Waerden: *Mathematische Statistik*, Berlin 1965, S. 78) sowie die Standardabweichung des Mittelwertes σ_M:

$$\sigma_M^2 = \frac{\sigma^2}{N} \qquad\qquad \sigma_M = \frac{\sigma^2}{\sqrt{N}}$$

An dieser Stelle ist noch ein Wort zur Bedeutung der Größe *Standardabweichung* notwendig: Aufgrund unserer Messungen erhalten wir den Mittelwert $\bar{x}$. Schließen wir von $\bar{x}$ auf den wahren Wert μ, so müssen wir Abweichungen in Rechnung stellen. Diese Abweichungen sind gegeben durch den Stichprobenfehler des Mittelwertes. Wir können damit rechnen, daß der wahre Wert mit einer Wahrscheinlichkeit

68% im Intervall $\bar{x} \pm 1 \cdot \sigma_M$
95% im Intervall $\bar{x} \pm 2 \cdot \sigma_M$

liegt. Diese Intervalle heißen *Konfidenz-* oder *Vertrauensintervalle.* Sie entsprechen der Fläche unter der Gaußschen Normalverteilungskurve

$$g(x) = \frac{1}{\sigma_M\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma_M}\right)^2\right]$$

im Bereich von $\mu \pm 1\sigma_M$ bzw. $\mu \pm 2\sigma_M$ (die Gesamtfläche unter dieser Normalverteilungskurve ist 1).
Bei der Darstellung der Ergebnisse von Messungen wird in der Regel der Mittelwert und der Stichprobenfehler des Mittelwertes angegeben.

Nun wird in der Physik zwischen Grundgrößen wie Länge, Zeit, Masse usf. und abgeleiteten Größen wir spezifisches Gewicht, Geschwindigkeit, Beschleunigung etc. unterschieden. Abgeleitete physikalische Größen lassen sich nicht direkt messen: Sie werden aus einer oder mehreren gemessenen Größen berechnet.
Die Geschwindigkeit beispielsweise wird aus den Meßgrößen Länge und Zeit errechnet. In diesem Fall wird sich der Stichprobenfehler für die Geschwindigkeit aus den Stichprobenfehlern, die bei der Längen- und Zeitmessung auftreten, zusammensetzen.
Angenommen, eine physikalische Größe g sei nicht direkt meßbar, sondern eine Funktion der meßbaren Größen x und y: $g = f(x, y)$. Für die Größen x und y werden Mittelwerte $\bar{x}$, $\bar{y}$ und Standardabweichungen dieser Mittelwerte $\sigma_{M,x}$, $\sigma_{M,y}$ bestimmt. Dann berechnet sich die Standardabweichung $\sigma_{M,g}$ der Größe g nach dem *Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz.* Es sei hier ohne Beweis angegeben (s. beispielsweise: W.H. Westphal: *Physikalisches Praktikum*, Anhang C):

$$\sigma_{M,g} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot \sigma_{M,x}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot \sigma_{M,y}^2}$$

Dieser Ausdruck beschreibt, wie sich die Fehler der gemessenen Größen bei der Berechnung fortpflanzen. Die partiellen Ableitungen beziehen sich jeweils auf die Stelle $(\bar{x}, \bar{y})$.

Zum Schluß noch einige Literaturhinweise:

- K.Weltner: *Mathematik für Physiker, Bd.2*, Vieweg-Verlag[3]
- W.Walcher: *Praktikum der Physik*
- W.H.Westphal: *Physikalisches Praktikum*
- H.G.Zachmann: *Mathematik für Chemiker*
- I.N.Bronstein, K.A.Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik*

[3]Vorlage für diese Kurzinformationen zu Meßfehler und Fehlerrechnung.