Moderne Methoden in der Auswertung von Experimenten

Johannes Elmsheuser, Günter Duckeck

Ludwig-Maximilians-Universität München

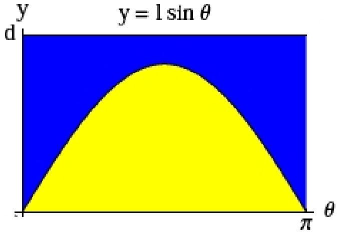
29 Apr 2008
aktualisiert: April 2015

Inhalt

Outline

Ein klassisches Beispiel

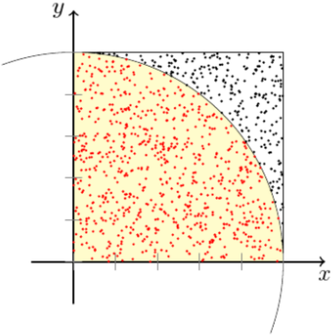
- Historisches Beispiel zur Berechnung der Zahl π: Buffons Nadel
  (Graf G.L.L. von Buffon, 1707-1788)
- Nadel der Länge l wird auf Fläche mit gleich weit voneinander entfernter paralleler Geraden geworfen (Abstand d).
- Häufigkeit für „Geradentreffer"
  $p = k/n = 2/\pi$ (für $d = l$)



Häufigkeit für Geradentreffer:
Anzahl mögliche Fälle: $\pi \cdot d$
Anzahl günstige Fälle: $\int_0^\pi l \sin\theta d\theta = 2l$

Ein klassisches Beispiel II

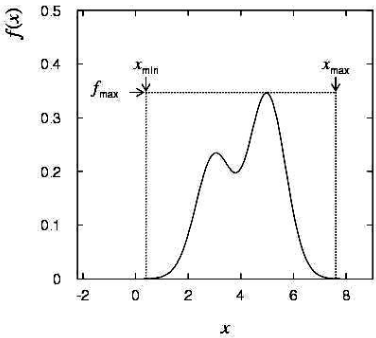
- Verfahren aus der Stochastik, Anwendung in vielen Bereichen (stat. Physik, Biophysik, Teilchenphysik, ...)
- löse analytisch nicht oder nur aufwendig lösbare Probleme numerisch
- Basis: sehr häufig durchgeführte Zufallsexperimente, Gesetz der großen Zahlen



Näherung von Pi über das Verhältnis von "Treffern" t und der Gesamtzahl der "Versuche" n, $\lim_{n\to\infty} t/n = \pi$

Monte-Carlo-Integration

Integration einer
Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
pdf



Wie im vorhergehenden Beispiel: simuliere die Anzahl der „Treffer" und „Nicht-Treffer"

Monte-Carlo-Methode

Monte-Carlo-Methode:

Eine numerische Methode zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten und abgeleiteten Größen unter Benutzung von Zufallszahlen

- Erzeuge eine Sequenz von gleichförmig verteilten Zufallszahlen $r_1, .., r_m$ im Intervall $[0, 1]$
- Benutze diese Sequenz, um eine andere Sequenz $x_1, ..., x_n$ zu erzeugen, die einer für uns interessanten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (*pdf*) $f(x)$ folgt
- Benutze die Werte x, um Eigenschaften von $f(x)$ zu bestimmen, z.B. Anzahl von x in $a < x < b$: $\int_a^b f(x)dx$
- $\Rightarrow$ Monte-Carlo-Berechnung $\widehat{=}$ Integration
- generierte Monte-Carlo-Werte $\widehat{=}$ „Simulierte Daten"

Outline

Erzeugung von Zufallszahlen (I)

Erzeuge gleichverteilte Zahlen im Intervall $[0,1]$

- Würfle eine Folge von Zahlen $\rightarrow$ „Zufallszahlengenerator"
- Computeralgorithmen zur Erzeugung der Folge $I_1, ..., I_n$
- Computeralgorithmen: nur deterministische Zahlenfolgen, sog. „Pseudo-Zufallszahlen"

Anforderungen:

- „zufällig" verteilt mit langer Periode
- reproduzierbar ist manchmal erwünscht, d.h. gleiche Zahlenfolge von Zufallszahlen bei gleichen Startbedingungen
- schneller Algorithmus

Erzeugung von Zufallszahlen (II)

Beispiele:

- linear kongruenter Generator:
  - $I_j = (a \cdot I_{j-1} + c) \mod m$
  - 3 ganzzahlige Konstanten: Multiplikator a, Summand c, Modul m
  - I_0: Saatzahl (seed)
  - Zahlenfolge $I_1, I_2, ...$ zwischen 0 und $m - 1$
  - periodische Folge mit maximaler Periode m
  - gleichförmiges $u_j = I_j / m$ in $[0, 1]$
- Multiplikativer linear kongruenter Generator:
  - Setze: $c = 0$

Erzeugung von Zufallszahlen (III)

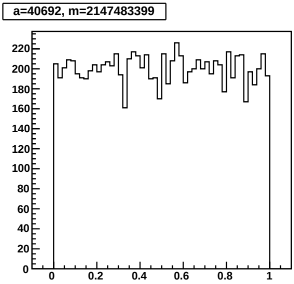
- Beispiel einer periodischen Folge: $a = 3$,$m = 7$, $I_0 = 1$

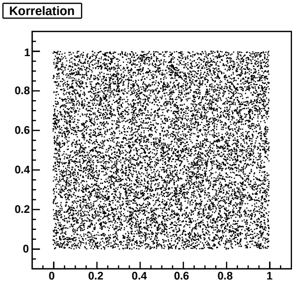
$$
\begin{aligned}
I_0 &= 1 \\
I_1 &= (3 \cdot 1) \mod 7 = 3 \\
I_2 &= (3 \cdot 3) \mod 7 = 2 \\
I_3 &= (3 \cdot 2) \mod 7 = 6 \\
I_4 &= (3 \cdot 6) \mod 7 = 4 \\
I_5 &= (3 \cdot 4) \mod 7 = 5 \\
I_6 &= (3 \cdot 5) \mod 7 = 1
\end{aligned}
$$

- $\Rightarrow$ Wähle a, m entsprechend, um lange Periode zu erhalten
- m nahe der größten Integer Zahler des Computers
- Benutze nur Untersequenz

Erzeugung von Zufallszahlen (IV)

- u_i sind in $[0, 1]$ aber auch wirklich zufällig ?
- Wähle a, m, so dass I_i Zufallszahlentests bestehen (s.Blobel)
  - Gleichförmige Verteilung
  - χ^2-Test für Unterintervalle von $[0, 1]$
  - Korrelationstest für n-dimensionales Gitter
  - Weitere Tests: Gap-Test, Random-Walk





Erzeugung von Zufallszahlen (IV)

Zufallszahlengeneratoren in ROOT: (Auszug aus Doku)

- *TRandom3*, is based on the „Mersenne Twister generator", and is the recommended one, since it has good random proprieties (period of about 10^{6000}) and it is fast.
- *TRandom1*, based on the RANLUX algorithm, has mathematically proven random proprieties and a period of about 10^{171}. It is however slower than the others.
- *TRandom2*, is based on the Tausworthe generator of L'Ecuyer, and it has the advantage of being fast and using only 3 words (of 32 bits) for the state. The period is 10^{26}.

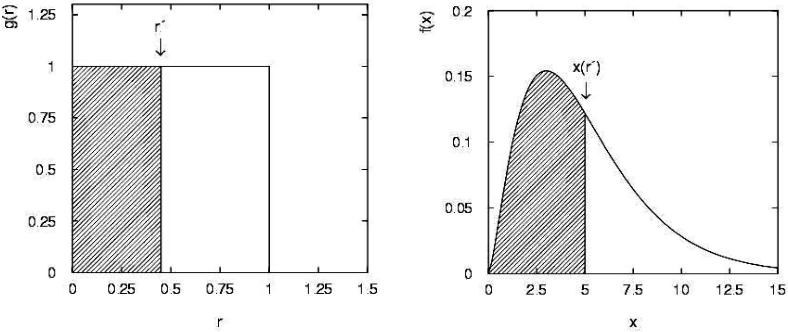
Outline

Erzeugung beliebig verteilter Zufallszahlen

- Methoden:
  - Transformationsmethode
    u_i in $[0, 1]$ gleichförmig verteilt
    Suche $x(u)$, so dass $x_I = x(u_i)$ Verteilungsfunktion $f(x)$ folgen
  - v. Neumannsches Rückweisungsverfahren
    („acceptance-rejection method")
  - Kombination der beiden Methoden

Die Transformationsmethode (I)

- Gegeben $u_1, ..., u_n$ gleichförmig verteilt in $[0, 1]$
- Finde $x_1, ..., x_n$ die $f(x)$ folgen, durch geeignete Transformation $x(u)$

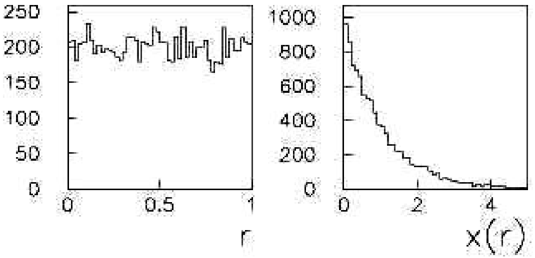


- Sei: $P(u \leq u') = P(x \leq x(u'))$
  d.h. $\int_{-\infty}^{u'} g(u)du = u' = \int_{-\infty}^{x(u')} f(u')du' = F(x(u'))$
- d.h. Setze: $F(x) = u$ and löse diese Gl. für $x(u)$

Die Transformationsmethode (II)

Beispiel:

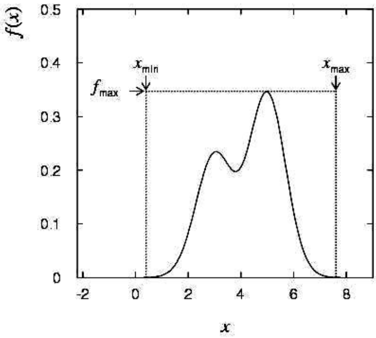
- Exponetielle pdf: $f(x, \lambda) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x)$ für $x \geq 0$
  $\Rightarrow u = \int_0^x \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot t) dt = 1 - exp(-\lambda \cdot x)$
  $\Rightarrow x_j = -\ln(1 - u_j)/\lambda$ bzw. $x_J = -\ln(u_j)/\lambda$



- Integral $F(x)$ der Verteilung $f(x)$ muß bekannt und invertierbar sein. $F^{-1}(u)$ folgt dann Verteilung $f(x)$

Die Akzeptanzmethode

- Integration einer Wahrscheinlichkeitsdichtefkt. *pdf*
- In 2D: umschließe Funktion mit einer definierten Fläche



- Erzeuge eine Zufallszahl x, gleichverteilt in $[x_{min}, x_{max}]$, d.h. $x = x_{min} + r_1(x_{max} - x_{min})$ wobei r_1 gleichverteilt in $[0, 1]$.
- Generiere eine 2. unabhängige Zufallszahl gleichverteilt zwischen 0 und f_{max}, d.h. $u = r_2 f_{max}$
- Wenn $u < f(x)$, akzeptiere x; falls nicht, verwerfe x und wiederhole die Prozedur

Die Akzeptanzmethode - Beispiel (I)

Berechnung der Zahl π

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

im Intervall $[0, 1]$

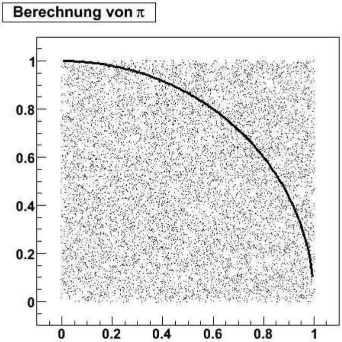
Akzeptiere Punktepaar, wenn

$$x^2 + y^2 <= 1$$

Bilde Verhältnis von

„Innerhalb/Gesamt"

$$\pi = 4 \cdot \text{Innerhalb/Gesamt}$$



$\Rightarrow$ DEMO

Erzeugung Gaussverteilter Zufallszahlen

Standardisierte Normalverteilung: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

- Einfacher Algorithmus basierend auf Zentralem Grenzwertsatz: $x_i = \sum_{j=1}^{12} u_j - 6$
- Box-Muller-Verfahren:
    - Erzeuge gleichförmig verteilte u_1, u_2 in $[0, 1]$
    - Berechne: $v_1 = 2u_1 - 1$, $v_2 = 2u_2 - 1$ (v_1, v_2 gleichförmig verteilt in $[-1, +1]$)
    - Berechne: $r^2 = v_1^2 + v_2^2$.
    - Falls $r^2 > 1$, beginne von vorne.
      sonst: $x_1 = v_1 \sqrt{\frac{-2 \ln r^2}{r^2}}$ und $x_2 = v_2 \sqrt{\frac{-2 \ln r^2}{r^2}}$
    - x_1 und x_2 sind unabhängig normal verteilt.

Effizienz von Monte-Carlo-Berechnungen

Vergleiche Genauigkeit von Monte-Carlo mit anderen Methoden

- Monte-Carlo-Berechnung $\hat{=}$ Integration
- Vergleich mit numerischer Integration:
  - Trapezregel (Simpsonsche Regel)

Für 1-dim Integral:

- MC:
  - $n \sim$ Anzahl der generierten Zufallszahlen
  - Genauigigkeit: $\sim 1/\sqrt{n}$
- Trapez-Regel (Simpson):
  - $n \sim$ Anzahl der Intervalle
  - Genauigkeit: $\sim 1/n^2$ ($\sim 1/n^4$)
- Numerische Methoden genauer mit weniger Rechenaufwand

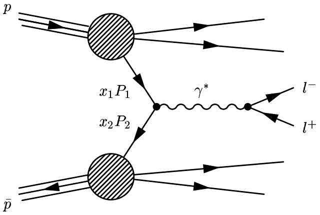
N-dim:

- MC: Genauigkeit $\sim 1/\sqrt{n}$, unabhängig von Dimension
- Trapez: Genauigkeit $\sim 1/(\sqrt[d]{n^2})$
- Für $d \geq 4$ MC-Methode besser

Outline

Monte-Carlo-Ereignis-Generatoren

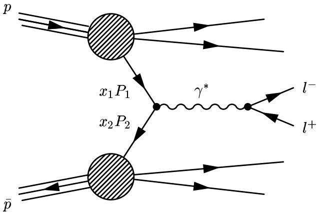
Einfache Reaktion:
$p\bar{p} \to Z/\gamma^* \to e^+e^-$



- Ereignis-Generatoren werden benutzt, um Teilchenreaktionen zu simulieren
- z.B. PYTHIA, HERWIG, ALPGEN, ...
- Ausgabe: „Ereignisse", d.h. für jedes Ereignis wird eine Liste von Teilchen generiert zusammen mit den Vierervektoren, etc.

Monte-Carlo-Ereignis-Generatoren

Einfache Reaktion:
$p\bar{p} \rightarrow Z/\gamma^* \rightarrow e^+e^-$



- Ereignis-Generatoren werden benutzt, um Teilchenreaktionen zu simulieren
- z.B. PYTHIA, HERWIG, ALPGEN, ...
- Ausgabe: „Ereignisse", d.h. für jedes Ereignis wird eine Liste von Teilchen generiert zusammen mit den Vierervektoren, etc.
- "Ereignis" = 1 Kollisionsereignis bzw. die Menge aller Detektordaten, die einer Kollision von zwei Protonenbündeln zugeordnet werden
- Detektordaten: "echte" Daten oder simulierte Daten

```
--------  LHA event information and listing  ----------------------------------------------------------------------

   process =        1    weight =    1.8982e-05     scale =   3.3269e+02 (GeV)
                      alpha_em =    7.8165e-03    alpha_strong =   1.0700e-01

   Participating Particles
   no        id stat     mothers     colours      p_x        p_y        p_z         e          m        tau     spin
    1         2   -1     0      0   501      0      0.000      0.000   2832.442   2832.442      0.000    0.000  -1.000
    2        -1   -1     0      0     0    501      0.000      0.000    -60.411     60.411      0.000    0.000   1.000
    3   1000024    1     1      2     0      0     21.435    218.452    526.439    622.751    250.000    0.000  -1.000
    4   1000023    1     1      2     0      0    -21.435   -218.452   2245.592   2270.102    250.000    0.000  -1.000

--------  End LHA event information and listing  ------------------------------------------------------------------
```

-------- PYTHIA Event Listing (complete event) --

no	id	name	status	mothers		daughters		colours		p_x	p_y	p_z	e	m
0	90	(system)	-11	0	0	0	0	0	0	0.000	0.000	0.000	8000.000	8000.000
1	2212	(p+)	-12	0	0	62	0	0	0	0.000	0.000	4000.000	4000.000	0.938
2	2212	(p+)	-12	0	0	63	0	0	0	0.000	0.000	-4000.000	4000.000	0.938
3	2	(u)	-21	7	7	5	6	501	0	0.000	0.000	2832.442	2832.442	0.000
4	-1	(dbar)	-21	8	0	5	6	0	501	0.000	0.000	-60.411	60.411	0.000
5	1000024	(~chi_1+)	-22	3	4	9	9	0	0	21.435	218.452	526.439	622.751	250.000
6	1000023	(~chi_20)	-22	3	4	10	10	0	0	-21.435	-218.452	2245.592	2270.102	250.000
7	2	(u)	-42	41	41	3	3	501	0	-0.000	0.000	2832.442	2832.442	0.000
8	-1	(dbar)	-41	40	40	11	4	0	503	0.000	-0.000	-188.076	188.076	0.000
9	1000024	(~chi_1+)	-44	5	5	43	43	0	0	25.711	213.290	515.821	612.148	250.000
10	1000023	(~chi_20)	-44	6	6	44	44	0	0	-20.347	-219.766	2256.062	2280.576	250.000
11	21	(g)	-43	8	0	38	39	501	503	-5.364	6.476	-127.517	127.794	0.000
12	21	(g)	-31	19	19	14	15	505	504	0.000	0.000	20.177	20.177	0.000
13	21	(g)	-31	20	0	14	15	504	506	0.000	0.000	-9.805	9.805	0.000
14	21	(g)	-33	12	13	16	17	507	506	-3.818	1.424	-9.162	10.028	0.000
15	21	(g)	-33	12	13	18	18	505	507	3.818	-1.424	19.534	19.955	0.000
16	21	(g)	-51	14	0	21	21	508	506	-1.731	3.062	1.424	3.795	0.000
17	21	(g)	-51	14	0	23	23	507	508	-1.632	-1.807	-8.259	8.610	0.000
18	21	(g)	-52	15	15	22	22	505	507	3.363	-1.255	17.207	17.577	0.000
19	21	(g)	-42	25	25	12	12	505	504	-0.000	0.000	20.177	20.177	0.000
20	21	(g)	-41	26	0	24	13	509	506	0.000	-0.000	-41.014	41.014	0.000
21	21	(g)	-44	16	16	27	27	508	506	-1.437	3.004	1.118	3.513	0.000
22	21	(g)	-44	18	18	28	28	505	507	3.409	-1.264	17.475	17.849	0.000
23	21	(g)	-44	17	17	29	29	507	508	0.461	-2.217	-8.370	8.671	0.000
24	21	(g)	-43	20	0	30	30	509	504	-2.434	0.476	-31.059	31.158	0.000
25	21	(g)	-42	51	0	19	19	505	504	0.000	-0.000	20.177	20.177	0.000
26	2	(u)	-41	52	52	31	20	509	0	-0.000	0.000	-646.205	646.205	0.000
27	21	(g)	-44	21	21	37	37	508	506	-1.451	3.037	1.165	3.562	0.000
28	21	(g)	-44	22	22	34	34	505	507	3.407	-1.259	17.429	17.804	0.000
29	21	(g)	-44	23	23	32	33	507	508	0.362	-1.985	-8.405	8.644	0.000
30	21	(g)	-44	24	24	56	56	509	504	-2.795	1.322	-31.046	31.200	0.000
31	2	(u)	-43	26	0	57	57	506	0	0.476	-1.115	-605.171	605.172	0.330
32	21	(g)	-51	29	0	35	36	510	508	1.386	-1.799	-7.906	8.226	0.000
33	21	(g)	-51	29	0	50	50	507	510	-0.922	-0.223	0.020	0.949	0.000
34	21	(g)	-52	28	28	48	49	505	507	3.306	-1.221	16.910	17.273	0.000
35	21	(g)	-51	32	0	55	55	510	511	0.422	-1.705	-7.406	7.611	0.000
36	21	(g)	-51	32	0	59	59	511	508	0.832	0.181	-0.394	0.938	0.000
37	21	(g)	-52	27	27	53	53	508	506	1.319	2.761	1.059	3.238	0.000

150	111	(pi0)	-83	129	138	241	242	0	0	0.016	-0.348	-1.427	1.475	0.135
151	-211	pi-	83	129	138	0	0	0	0	-0.713	0.092	-8.936	8.966	0.140
152	111	(pi0)	-83	129	138	243	244	0	0	-0.730	0.018	-6.471	6.514	0.135
153	2212	p+	83	129	138	0	0	0	0	0.146	-0.262	-3.643	3.774	0.938
154	-2212	pbar-	83	129	138	0	0	0	0	0.002	-0.378	-3.757	3.890	0.938
155	211	pi+	84	129	138	0	0	0	0	0.096	0.236	0.254	0.386	0.140
156	-211	pi-	84	129	138	0	0	0	0	0.022	0.034	-0.651	0.667	0.140
157	111	(pi0)	-84	129	138	245	246	0	0	0.473	0.554	-0.572	0.936	0.135
158	111	(pi0)	-84	129	138	247	248	0	0	0.076	0.007	0.592	0.612	0.135
159	211	pi+	84	129	138	0	0	0	0	-0.945	0.649	-0.623	1.312	0.140
160	-211	pi-	84	129	138	0	0	0	0	0.400	-0.003	0.444	0.613	0.140
161	111	(pi0)	-84	129	138	249	250	0	0	-0.544	0.692	0.279	0.934	0.135
162	221	(eta)	-84	129	138	251	253	0	0	0.132	0.622	0.674	1.077	0.548
163	213	(rho+)	-84	129	138	205	206	0	0	-0.021	-0.167	1.093	1.321	0.723
164	221	(eta)	-84	129	138	254	256	0	0	0.821	-0.503	3.688	3.851	0.548
165	111	(pi0)	-84	129	138	257	258	0	0	0.302	0.326	0.641	0.792	0.135
166	-211	pi-	84	129	138	0	0	0	0	0.093	-0.494	4.701	4.730	0.140
167	111	(pi0)	-84	129	138	259	260	0	0	1.988	-0.556	4.496	4.949	0.135
168	211	pi+	84	129	138	0	0	0	0	-0.301	0.076	0.851	0.916	0.140
169	-211	pi-	84	129	138	0	0	0	0	-0.097	-0.038	0.198	0.264	0.140
170	213	(rho+)	-84	129	138	207	208	0	0	0.494	0.095	2.126	2.313	0.762
171	223	(omega)	-84	129	138	261	263	0	0	-0.074	-0.733	-0.931	1.411	0.762
172	2	(u)	-71	75	75	174	187	506	0	1.129	0.455	-605.178	605.179	0.330
173	2103	(ud_1)	-71	80	80	174	187	0	506	-0.672	-0.594	1145.015	1145.016	0.771
174	213	(rho+)	-83	172	173	209	210	0	0	0.819	0.624	-324.280	324.283	0.827
175	111	(pi0)	-83	172	173	264	265	0	0	0.143	-0.327	-166.885	166.885	0.135
176	111	(pi0)	-83	172	173	266	267	0	0	0.638	-0.266	-95.690	95.693	0.135
177	111	(pi0)	-83	172	173	268	269	0	0	-0.227	0.597	-10.469	10.489	0.135
178	-211	pi-	84	172	173	0	0	0	0	-0.175	-0.348	-0.982	1.066	0.140
179	213	(rho+)	-84	172	173	211	212	0	0	0.031	-0.002	-3.682	3.750	0.710
180	-213	(rho-)	-84	172	173	213	214	0	0	-0.506	0.187	-2.946	3.097	0.786
181	213	(rho+)	-84	172	173	215	216	0	0	0.474	-0.011	3.125	3.235	0.691
182	111	(pi0)	-84	172	173	270	271	0	0	-0.054	-0.655	9.355	9.379	0.135
183	-211	pi-	84	172	173	0	0	0	0	0.044	0.546	11.291	11.305	0.140
184	211	pi+	84	172	173	0	0	0	0	-0.146	-0.116	3.783	3.790	0.140
185	-211	pi-	84	172	173	0	0	0	0	0.136	0.647	60.209	60.212	0.140
186	2224	(Delta++)	-84	172	173	217	218	0	0	-0.253	-1.201	595.259	595.261	1.141
187	-211	pi-	84	172	173	0	0	0	0	-0.467	0.186	461.750	461.750	0.140
188	211	pi+	91	118	0	0	0	0	0	15.695	41.859	132.836	140.157	0.140
189	111	(pi0)	-91	118	0	272	273	0	0	38.554	99.810	317.062	334.629	0.135
190	-211	pi-	91	119	0	0	0	0	0	0.098	0.326	1.809	1.846	0.140

264	22	gamma	91	175	0	0	0	0	0	0.004	-0.108	-30.867	30.868	0.000
265	22	gamma	91	175	0	0	0	0	0	0.139	-0.219	-136.017	136.018	0.000
266	22	gamma	91	176	0	0	0	0	0	0.247	-0.106	-46.600	46.601	0.000
267	22	gamma	91	176	0	0	0	0	0	0.391	-0.160	-49.090	49.092	0.000
268	22	gamma	91	177	0	0	0	0	0	-0.080	0.072	-1.807	1.810	0.000
269	22	gamma	91	177	0	0	0	0	0	-0.147	0.525	-8.662	8.679	0.000
270	22	gamma	91	182	0	0	0	0	0	-0.067	-0.169	2.172	2.179	0.000
271	22	gamma	91	182	0	0	0	0	0	0.013	-0.486	7.184	7.200	0.000
272	22	gamma	91	189	0	0	0	0	0	31.604	81.710	259.501	273.891	0.000
273	22	gamma	91	189	0	0	0	0	0	6.950	18.099	57.561	60.738	0.000
274	22	gamma	91	191	0	0	0	0	0	1.298	3.466	11.072	11.674	0.000
275	22	gamma	91	191	0	0	0	0	0	0.493	1.402	4.199	4.454	0.000
276	22	gamma	91	200	0	0	0	0	0	0.200	0.244	-1.796	1.824	0.000
277	22	gamma	91	200	0	0	0	0	0	0.104	0.016	-0.727	0.734	0.000
278	22	gamma	91	204	0	0	0	0	0	-0.185	0.244	-5.078	5.088	0.000
279	22	gamma	91	204	0	0	0	0	0	-0.216	0.552	-11.493	11.508	0.000
280	22	gamma	91	206	0	0	0	0	0	-0.075	0.141	0.469	0.496	0.000
281	22	gamma	91	206	0	0	0	0	0	-0.036	0.096	0.090	0.136	0.000
282	22	gamma	91	208	0	0	0	0	0	0.146	0.024	0.439	0.463	0.000
283	22	gamma	91	208	0	0	0	0	0	0.499	0.106	0.888	1.025	0.000
284	22	gamma	91	210	0	0	0	0	0	0.293	0.232	-166.316	166.317	0.000
285	22	gamma	91	210	0	0	0	0	0	0.220	0.286	-122.073	122.074	0.000
286	22	gamma	91	212	0	0	0	0	0	0.119	-0.015	-2.768	2.770	0.000
287	22	gamma	91	212	0	0	0	0	0	0.041	0.060	-0.632	0.636	0.000
288	22	gamma	91	214	0	0	0	0	0	-0.106	0.244	-1.883	1.902	0.000
289	22	gamma	91	214	0	0	0	0	0	-0.023	0.098	-0.321	0.336	0.000
290	22	gamma	91	216	0	0	0	0	0	0.104	-0.041	0.759	0.767	0.000
291	22	gamma	91	216	0	0	0	0	0	0.068	-0.211	1.419	1.436	0.000
292	22	gamma	91	220	0	0	0	0	0	-0.174	-0.564	3.400	3.450	0.000
293	22	gamma	91	220	0	0	0	0	0	-3.225	-10.397	59.384	60.374	0.000
294	22	gamma	91	221	0	0	0	0	0	-2.664	-7.819	47.018	47.739	0.000
295	22	gamma	91	221	0	0	0	0	0	-0.791	-2.198	13.646	13.844	0.000
296	22	gamma	91	230	0	0	0	0	0	-0.072	0.196	-2.758	2.766	0.000
297	22	gamma	91	230	0	0	0	0	0	0.003	0.139	-0.921	0.931	0.000
298	22	gamma	91	231	0	0	0	0	0	0.041	0.070	-2.433	2.435	0.000
299	22	gamma	91	231	0	0	0	0	0	0.015	0.045	-0.214	0.219	0.000
300	22	gamma	91	232	0	0	0	0	0	0.008	0.033	-0.075	0.082	0.000
301	22	gamma	91	232	0	0	0	0	0	0.089	0.005	-1.321	1.324	0.000
302	22	gamma	91	237	0	0	0	0	0	-1.449	0.969	-38.188	38.227	0.000
303	22	gamma	91	237	0	0	0	0	0	-0.015	0.009	-0.814	0.814	0.000
304	22	gamma	91	251	0	0	0	0	0	0.017	0.190	0.065	0.201	0.000
305	22	gamma	91	251	0	0	0	0	0	0.030	0.209	0.247	0.325	0.000

Monte-Carlo-Detektorsimulation

- Detektorsimulation erhält Teilchenliste aus Ereignis-Generator als Eingabe
- Detektorsimulation:
  - Simuliert Durchgang der verschiedenen Teilchen durch Detektorkomponenten
  - Coulombstreuung (simuliert Streuwinkel)
  - Teilchenzerfälle (simuliert Lebensdauer)
  - Ionisierungsenergie (simuliert ΔE)
  - Elektromagnetische / hadronische Schauer
  - Elektronische Signale in Detektoren
- Simulierte Ausgabe hat gleiches Format wie echte Daten
  - Einfacher Vergleich zwischen Daten und MC (vorausgesetzt die Effizienzen sind gleich)
- Programmpaket: Geant4 (*toolkit for the simulation of the passage of particles through matter, initiated 1994*)
  - verwendet von ATLAS, CMS, ALICE, LHCb, ILC, Weltraumdetektoren, Simulationen von Strahlungsgefahr für Astronauten, ...

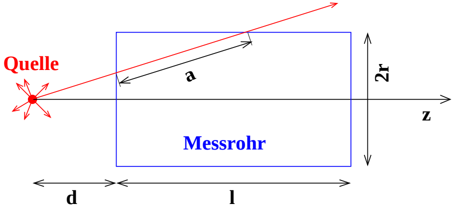
Beispiel zur Monte Carlo Methode

Wir behandeln hier und in den Übungen ein einfaches physikalisches Beispiel zur Anwendung der Monte Carlo Methode

Gegeben sei eine gleichförmig in alle Raumrichtungen strahlende radioaktive Quelle

Ihre Aktivität, d.h. Zerfälle pro Zeiteinheit, soll mit einem zylindrischen Messrohr (z.B. Geiger-Müller-Zähler) gemessen werden

Wir nehmen an, die Quelle sei punktförmig und am Ursprung der Koordinatensystems $(x, , y, z) = (0, 0, 0)$



- Das Messrohr überdeckt nur einen Teil des gesamten Raumwinkels $\Omega = 4\pi$
  Außerdem soll die Nachweiswahrscheinlichkeit P des Messrohrs davon abhängen, wie groß der Weg der Strahlung a darin ist
  $P = P(a) = 1 - e^{-\lambda\, a}$ (das ist z.B. für γ-Strahler der Fall)
- Aufgabe: Man bestimme die totale Nachweiswahrscheinlichkeit, also welcher Bruchteil der ausgesendeten Strahlung nachgewiesen wird, und den statistischen Fehler.

Beispiel zur Monte Carlo Methode

Dieses Problem kann mit Hilfe einer kleinen Monte Carlo Simulation gelöst werden

- Man „erzeuge" Strahlung, die gleichförmig auf einer Kugeloberfläche verteilt ist (Kugelkoordinaten!)
  - Azimuthalwinkel ϕ: gleichverteilte Zufallszahlen in $[0, 2\,\pi]$
  - Polarwinkel θ: nach $f(\theta) = \sin\theta$ verteilte Zufallszahlen in $0, \pi/2$

  Das Raumwinkelelement ist $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\cos\theta = \sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$
  Die Simulation des Halbraumes $\cos\theta < 0$ ist nicht notwendig
  $\rightarrow$ ergibt globalen Faktor $1/2$

- Man berechne für jedes Teilchen die Strecke im Messrohr

$$
\begin{aligned}
\tan\theta \geq \tfrac{r}{d} \quad &\Rightarrow \quad a = 0 \\
\tfrac{r}{d} > \tan\theta \geq \tfrac{r}{d+l} \quad &\Rightarrow \quad a = \tfrac{r}{\sin\theta} - \tfrac{d}{\cos\theta} \\
\tan\theta < \tfrac{r}{d+l} \quad &\Rightarrow \quad a = \tfrac{l}{\cos\theta}
\end{aligned}
$$

  und würfele, ob das Teilchen registriert wird oder nicht

- Die gesamte Nachweiswahrscheinlichkeit ist dann die Zahl der registrierten geteilt durch die Zahl der erzeugten Teilchen

Komplexes Beispiel zur Monte Carlo Methode

Moderne Experimente der Hochenergiephysik bestehen aus sehr vielen einzelnen Detektoren

- L3 am LEP Beschleuniger (CERN) hatte u.a. etwa $11\,000$ Kristalle zur Energiemessung
- CMS am LHC Beschleuniger wird ca. $15\,000$ Silizium-Streifendetektoren enthalten mit etwa 10^7 einzelnen Kanälen

Zur Analyse der Daten werden sehr detailierte MC Simulationen benötigt

- Simulation der physikalischen Reaktion:
  alle enstehenden Teilchen und deren erwartete Energie-, Impuls- und Winkelverteilungen
- Nachweiswahrscheinlichkeit für jedes Detektorelement
- Orts- und Energieauflösung jeder einzelnen Detektorkomponente

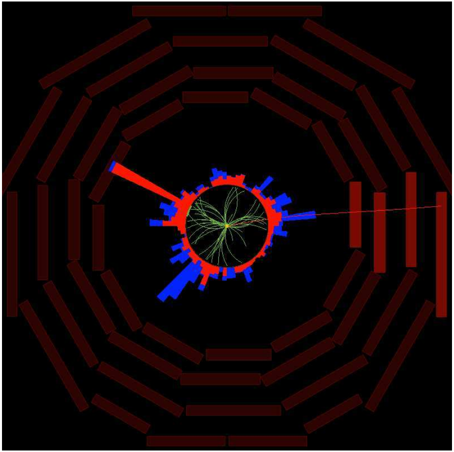
Am Ende der Simulation stehen digitalisierte Signale der einzelnen Detektorkomponenten, die sich nicht von echten Daten unterscheiden

Der simulierte Datensatz dient dann zur Optimierung der Selektion und Bestimmung der Akzeptanz

Komplexes Beispiel zur Monte Carlo Methode

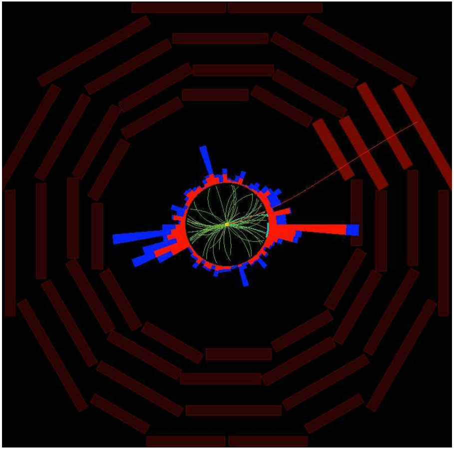
CMS Experiment am LHC Beschleuniger am CERN:

Simulation eines Top-Paar-Ereignisses $\mathrm{pp} \rightarrow \mathrm{t\bar{t}} + X$



Komplexes Beispiel zur Monte Carlo Methode

CMS Experiment am LHC Beschleuniger am CERN:
Im Vergleich zu einem realen Ereignisse in den Daten $\mathrm{pp} \to \mathrm{t\bar{t}} + X$



Outline

Zusammenfassung

- Monte-Carlo-Methode
- Erzeugung von Zufallszahlen
- Beliebig verteilte Zufallszahlen
- Beispiele für Monte-Carlo-Methoden
- Anwendung von Monte-Carlo-Methoden in der Teilchenphysik